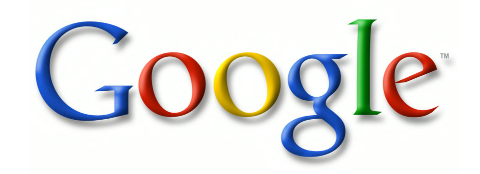
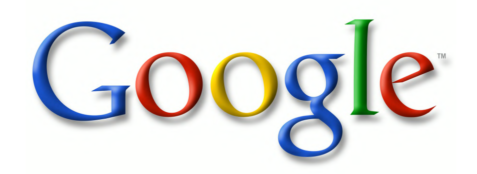


Google





GRUNDZÜGE

EINER REIN-GEOMETRISCHEN

THEORIE DER RAUMKURVE

VIERTER ORDNUNG ERSTER SPECIES

VON

DR. HEINRICH SCHROETER,
PROFESSOR DER MATHEMATIK AN DER UNIVERSITÄT ZU BRESLAU.

„Geometrica geometrice.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1890.

Alexander Ziwet

GRUNDZÜGE

EINER REIN-GEOMETRISCHEN

THEORIE DER RAUMKURVE

VIERTER ORDNUNG ERSTER SPECIES

VON

DR. HEINRICH SCHROETER,

PROFESSOR DER MATHEMATIK AN DER UNIVERSITÄT ZU BRESLAU.

„Geometrica geometrice."

BG

LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1890.

Vorrede.

Die Raumkurve vierter Ordnung erster Species, der vollständige Schnitt zweier Oberflächen zweiter Ordnung, ist teils in größeren geometrischen Werken* gelegentlich berührt, teils in zahlreichen besonderen Abhandlungen** sowohl

---

* J. V. Poncelet, traité des propriétés projectives des figures, Paris, 1822.

O. Hesse, Vorlesungen über analytische Geometrie des Raumes, II. Aufl. Leipzig 1869.

P. Serret, Géométrie de direction, Paris 1869.

R. Sturm, Synthetische Untersuchungen über Flächen dritter Ordnung, Leipzig 1867.

G. Salmon, Analytische Geometrie des Raumes, deutsch bearbeitet von W. Fiedler, II. Aufl. Leipzig 1874.

L. Cremona, Grundzüge einer allgemeinen Theorie der Oberflächen in synthetischer Behandlung, in's Deutsche übertragen von M. Curtze, Berlin 1870.

Th. Reye, Die Geometrie der Lage, II. Aufl. Hannover 1877.

W. Fiedler, Die darstellende Geometrie in organischer Verbindung mit der Geometrie der Lage, II. Aufl. Leipzig 1875.

H. Schroeter, Theorie der Oberflächen zweiter Ordnung und der Raumkurven dritter Ordnung als Erzeugnisse projektivischer Gebilde, Leipzig 1880.

** Th. Reye, Sopra le curve gobbe di quart'ordine e prima specie e i loro punti d'intersezione con superficie di secondo grado (Ann. di matem. Ser. II, t. II p. 122 ed 129).

A. Harnack, Über die Darstellung der Raumkurve vierter Ordnung erster Species und ihres Sekantensystems durch doppelt periodische Funktionen (Math. Annalen Bd. 12, S. 47).

E. Lange, Die 16 Wendeberührungspunkte der Raumkurve vierter Ordnung erster Species (Inaug.-Diss., Dresden 1882) auch (Schlömilch's Zeitschrift Jahrg. 28 S. 1 u. 65).

A. Voss, Die Liniengeometrie in ihrer Anwendung auf die Flächen zweiten Grades (Math. Annalen Bd. 10, S. 143).

W. Killing, Der Flächenbüschel zweiter Ordnung (Diss. Berlin 1872).

L. Gegenbauer, Über Raumkurven vierter Ordnung erster

auf synthetischem, als auch analytischem Wege eingehender untersucht worden, die in verschiedenen mathematischen Zeitschriften zerstreut sind.

Insbesondere sind die schönen Eigenschaften der $C_I^{(4)}$, welche eine große Analogie mit den Eigenschaften der ebenen Kurve dritter Ordnung $\mathfrak{K}^{(3)}$ darbieten, auf einem der rein-geometrischen Forschung durchaus fremdartigen Wege hervorgetreten, nämlich aus der Darstellung der Koordinaten eines Punktes der Kurve durch einen Parameter vermittelst doppeltperiodischer Funktionen und aus einer Anwendung des Abelschen Theorems, auf welche Clebsch zuerst aufmerksam gemacht hat.*

Es erschien wünschenswert, diese interessanten und äußerst einfachen Beziehungen rein-geometrischen Charakters auf dem naturgemäßen, rein-geometrischen Wege abzuleiten, wie schon vor langer Zeit Chasles die Analogie zwischen der Raumkurve dritter Ordnung $C^{(3)}$ und dem ebenen Kegelschnitte $\mathfrak{K}^{(2)}$ aufgedeckt hat.

Eine solche nur aus den Elementen der räumlichen Geometrie entspringende Ableitung und eine übersichtliche

---

Species (Sitz.-Ber. d. Wiener Acad. d. W. 93, S. 790—797).

A. Ameseder, Über Konfigurationen auf der Raumkurve vierter Ordnung erster Species (Sitz.-Ber. d. Wiener Acad. d. Wissenschaften Bd. 87, S. 1179).

F. Schur, Über eine besondere Klasse von Flächen vierter Ordnung (Math. Annalen Bd. 20, S. 254).

V. Eberhard, Die Raumkurven vierter Ordnung erster und zweiter Species in ihrem Zusammenhang mit den Steinerschen Schließungs-Problemen bei den ebenen Kurven dritter Ordnung (Schlömilchs Zeitschrift f. Math. u. Phys. Bd. 32, S. 65).

A. Milinowski, Zur Theorie der Raumkurven vierter Ordnung erster Art (Kronecker's Journal Bd. 97, S. 277).

G. Westphal, Über das simultane System zweier Formen zweiten Grades etc. (Math. Annalen Bd. 13, S. 16).

H. Schroeter, Über eine Raumkurve vierter Ordnung und erster Species (Kroneckers Journal Bd. 93, S. 132)

u. a. m.

* A. Clebsch, Über die Anwendung der Abel'schen Funktionen in der Geometrie (Borchardts Journal für r. u. a. Math. Bd. 63, S. 189), sowie die vorangehende Abhandlung desselben Bandes S. 94.

Zusammenstellung der wesentlichsten Eigenschaften der $C_I^{(4)}$, an welcher es bisher fehlte, hat der Verfasser in der vorliegenden kleinen Schrift zu geben versucht, die sich an seine früheren Bearbeitungen der „Kegelschnitte“, „der Oberflächen zweiter Ordnung und Raumkurven dritter Ordnung“, „der ebenen Kurven dritter Ordnung“ folgerecht anschließt und auf dieselben stützt.

Er ist sich dabei wohl bewußt, viele Fragen, insbesondere hinsichtlich der Realität der auftretenden geometrischen Elemente, der Unterscheidung der verschiedenen geometrischen Gestalten, welche die $C_I^{(4)}$ annehmen kann u. a. m. unerörtert gelassen zu haben, allein diese Grundzüge einer reingeometrischen Theorie der Raumkurve vierter Ordnung erster Species sollen vorerst nur die Umrisse liefern, deren weitere Ausgestaltung einer späteren Forschung vorbehalten bleibt und zu derselben anregen möge.

Für die bei der Korrektur des Druckes geleistete Hülfe spricht der Verfasser seinen Freunden, Herrn Dr. E. Toeplitz und Herrn Prof. Dr. H. Vogt den verbindlichsten Dank aus.

Breslau, im Oktober 1889.

H. Schroeter.

Inhaltsverzeichnis.

Die Raumkurve vierter Ordnung erster Species.

§ 1. **Die $C_I^{(4)}$ als Grundkurve eines Büschels von $F^{(2)}$.**

Eine Raumkurve vierter Ordnung erster Species $C_I^{(4)}$ ist der vollständige Schnitt zweier Oberflächen zweiter Ordnung $F_1^{(2)}$ und $F_2^{(2)}$; jede Ebene begegnet derselben im allgemeinen in vier Punkten, den Durchschnittspunkten der beiden Kegelschnitte, in welchen die Ebene die Flächen $F_1^{(2)}$ und $F_2^{(2)}$ durchschneidet. Aus der Theorie der Oberflächen zweiter Ordnung ist bekannt, daß sich drei beliebige $F_1^{(2)} F_2^{(2)} F_3^{(2)}$ im allgemeinen in acht Punkten schneiden, und daß solche acht Punkte eine Gruppe von acht associierten Punkten bilden, indem jede $F^{(2)}$, welche durch sieben dieser Punkte geht, auch durch den achten hindurchgehen muß. Die Gesamtheit solcher durch dieselben acht associierten Punkte gehenden $F^{(2)}$ ist von doppelt-unendlicher Mannigfaltigkeit (∞^2) und heifst ein Flächenbündel $[F^{(2)}]$. Eine beliebige $F_3^{(2)}$ kann daher mit der Raumkurve $C_I^{(4)}$ im allgemeinen nicht mehr als acht Punkte gemein haben.

Durch die ganze Raumkurve $C_I^{(4)}$ gehen aber außer den beiden $F_1^{(2)}$ und $F_2^{(2)}$, als deren Durchschnitt sie auftritt, noch unendlich viele andere $F^{(2)}$, deren Gesamtheit eine einfach-unendliche Mannigfaltigkeit (∞^1) bildet und ein Flächenbüschel mit der Grundkurve $C_I^{(4)}$ genannt wird.

Eine beliebige $F^{(2)}$ des Büschels läßt sich in folgender Weise herstellen: Ist die Raumkurve $C_I^{(4)}$ als der Schnitt der beiden Flächen $F_1^{(2)}$ und $F_2^{(2)}$ gegeben, und nehmen wir einen beliebigen Punkt $\mathfrak{P}$ (außerhalb derselben) im Raume an, so schneidet jede durch $\mathfrak{P}$ gelegte Ebene die $C_I^{(4)}$ im allgemeinen in vier Punkten $\mathfrak{abcd}$, und durch die fünf Punkte $\mathfrak{abcd}\mathfrak{P}$ ist ein Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$ bestimmt. Für sämtliche durch $\mathfrak{P}$ ge-

legte Ebenen (das ganze Ebenenbündel) ist der Ort aller dieser Kegelschnitte $\mathfrak{K}^{(2)}$ eine und dieselbe Fläche $F^{(2)}$, welche durch $\mathfrak{P}$ und die ganze Raumkurve $C_I^{(4)}$ hindurchgeht. Denn ziehen wir zunächst durch $\mathfrak{P}$ einen beliebigen Strahl g und legen durch g ein Ebenenbüschel, so laufen alle Kegelschnitte $\mathfrak{K}^{(2)}$, die in diesen Ebenen enthalten sind, durch einen und denselben zweiten Punkt $\mathfrak{Q}$ der Geraden g. Da nämlich eine durch g gelegte Ebene der $C_I^{(4)}$ in vier Punkten $\mathfrak{abcd}$ begegnet, so schneidet sie die Flächen $F_1^{(2)}$ und $F_2^{(2)}$ in zwei Kegelschnitten, welche die gemeinschaftlichen Punkte $\mathfrak{abcd}$ haben. Begegnet also die Fläche $F_1^{(2)}$ der Geraden g in $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{q}_1$, die Fläche $F_2^{(2)}$ aber derselben Geraden in $\mathfrak{p}_2$ und $\mathfrak{q}_2$, so gehen die beiden Kegelschnitte

$$f_1^{(2)} \text{ durch } \mathfrak{abcd}\mathfrak{p}_1\mathfrak{q}_1$$
$$f_2^{(2)} \text{ durch } \mathfrak{abcd}\mathfrak{p}_2\mathfrak{q}_2.$$

Der durch $\mathfrak{P}$ gelegte Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$ muß daher die Gerade g noch in einem zweiten Punkte $\mathfrak{Q}$ schneiden, so daß die drei Punktepaare $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{q}_1$, $\mathfrak{p}_2$ und $\mathfrak{q}_2$, $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ einer Involution angehören, weil die drei Kegelschnitte $f_1^{(2)} f_2^{(2)} \mathfrak{K}^{(2)}$ einem Büschel angehören. Diese Punktinvolution auf g ist aber durch die beiden bei der Drehung der Ebene um g unverändert bleibenden Punktepaare $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{q}_1$, $\mathfrak{p}_2$ und $\mathfrak{q}_2$ schon vollständig bestimmt und liefert zu $\mathfrak{P}$ nur einen einzigen bestimmten konjugierten Punkt $\mathfrak{Q}$; folglich müssen alle Kegelschnitte $\mathfrak{K}^{(2)}$, die in den durch g gelegten Ebenen durch den Punkt $\mathfrak{P}$ und ihre Schnittpunkte mit der $C_I^{(4)}$ bestimmt werden, durch einen und denselben zweiten Punkt $\mathfrak{Q}$ der Geraden g gehen.

Ziehen wir durch $\mathfrak{P}$ einen zweiten Strahl g', so gilt für ihn dasselbe wie für g, d. h. alle Ebenen durch g' schneiden $C_I^{(4)}$ in Punktquadrupeln $\mathfrak{abcd}$, so daß die Kegelschnitte $\mathfrak{K}^{(2)}(\mathfrak{abcd}\mathfrak{P})$ außer durch $\mathfrak{P}$ noch durch einen und denselben Punkt $\mathfrak{Q}'$ der Geraden g' gehen. Den beiden Ebenenbüscheln durch g und g' gehört nun die Ebene $[gg']$ gemeinschaftlich an; diese Ebene $[gg']$ schneidet daher die Raumkurve $C_I^{(4)}$ in vier Punkten $\mathfrak{abcd}$ so, daß der Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}(\mathfrak{P}\mathfrak{abcd})$ sowohl durch $\mathfrak{Q}$ als auch durch $\mathfrak{Q}'$ geht, und dasselbe gilt für alle solche

durch $\mathfrak{P}$ gezogenen Strahlen, die in der Ebene $[gg']$ liegen, d. h. legt man durch $\mathfrak{P}$ eine beliebige Ebene ε, welche der $C_I^{(4)}$ in den vier Punkten $\mathfrak{abcd}$ begegnet, zieht in ε alle durch $\mathfrak{P}$ gehenden Strahlen g und bestimmt auf jedem g den oben konstruierten Punkt $\mathfrak{Q}$, so liegen sämtliche $\mathfrak{Q}$ auf einem und demselben Kegelschnitt, der durch die fünf Punkte $\mathfrak{Pabcd}$ bestimmt wird.

Hieraus geht hervor, daß, wenn man durch $\mathfrak{P}$ alle Strahlen g zieht (das ganze Strahlenbündel) und auf jedem Strahl g den oben konstruierten Punkt $\mathfrak{Q}$ ermittelt, der Ort aller dieser Punkte $\mathfrak{Q}$ identisch ist mit dem Ort aller Kegelschnitte $\mathfrak{K}^{(2)}$, die man erhält, wenn man durch $\mathfrak{P}$ sämtliche Ebenen legt (das ganze Ebenenbündel) und in jeder Ebene durch $\mathfrak{P}$ und ihre vier Schnittpunkte mit der $C_I^{(4)}$ einen Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$ legt. Jetzt können wir schließen, daß der Ort sämtlicher Punkte $\mathfrak{Q}$ oder sämtlicher Kegelschnitte $\mathfrak{K}^{(2)}$ eine Fläche $F^{(2)}$ sein muß, weil sie die Eigenschaft besitzt, einer beliebigen Geraden l des Raumes im allgemeinen in zwei Punkten zu begegnen.

Denn wird durch die beliebige Gerade l des Raumes eine Ebene gelegt, die durch $\mathfrak{P}$ geht und dadurch gerade bestimmt ist, so begegnet der in ihr enthaltene, oben bestimmte Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$ der Geraden l im allgemeinen in zwei Punkten, welche dem gesuchten Orte angehören. Wir schließen also:

Es giebt durch eine $C_I^{(4)}$ und einen nicht auf derselben befindlichen Punkt $\mathfrak{P}$ des Raumes immer eine und nur eine einzige Fläche $F^{(2)}$, die in der oben angegebenen Weise konstruiert werden kann. Sämtliche so konstruierten Flächen $F^{(2)}$ bilden ein Büschel von einfach-unendlicher Mannigfaltigkeit, welches die Eigenschaft besitzt, jede Ebene in einem Kegelschnittbüschel, jede Gerade in einer Punktinvolution (zweiten Grades) zu durchschneiden.

Da eine Oberfläche zweiter Ordnung durch neun unabhängig von einander gewählte Punkte des Raumes vollständig und eindeutig bestimmt ist, so dürfen, wenn wir die beiden

Flächen $F_1^{(2)}$ und $F_2^{(2)}$, deren Schnitt $C_I^{(4)}$ ist, bestimmen wollen, nur acht Punkte willkürlich und unabhängig von einander auf der $C_I^{(4)}$ gewählt werden, da für jede der beiden Flächen $F_1^{(2)}$ und $F_2^{(2)}$ noch je ein neunter außerhalb der $C_I^{(4)}$ zu ihrer Bestimmung erforderlich ist. Wir schließen also:

Die Raumkurve $C_I^{(4)}$ ist durch acht willkürlich und unabhängig von einander im Raume gewählte Punkte vollständig und eindeutig bestimmt.

Acht Punkte können aber insbesondere eine solche Lage im Raume haben, daß durch dieselben unendlich viele $C_I^{(4)}$ hindurchgehen; dann bilden sie eine Gruppe von acht associierten Punkten, die nicht von einander unabhängig sind, vielmehr ist einer von ihnen durch die andern sieben vollständig und eindeutig bestimmt.* Wir brauchen nur die $C_I^{(4)}$, welche als der Schnitt von $F_1^{(2)}$ und $F_2^{(2)}$ gegeben ist, mit einer beliebigen $F^{(2)}$, welche nicht die ganze $C_I^{(4)}$ enthält, zu durchschneiden. Da die drei Flächen $F^{(2)}\,F_1^{(2)}\,F_2^{(2)}$ im allgemeinen in acht Punkten sich schneiden, so geben

---

* O. Hesse, Über die lineare Konstruktion des achten Schnittpunktes dreier Oberflächen zweiter Ordnung, wenn sieben Schnittpunkte derselben gegeben sind (Crelles Journal Bd. 26, S. 147).

Th. Reye, Lineare Konstruktion des achten Schnittpunktes von drei Flächen zweiter Ordnung, Kroneckers Journ. Bd. 100, S. 487.

F. Caspary, Zur Konstruktion des achten Schnittpunktes dreier Oberflächen zweiter Ordnung, Kroneckers Journ. Bd. 99, S. 128.

H. Picquet, Sur trois problèmes fondamentaux relatifs aux surfaces du second degré, Kroneckers Journ. Bd. 99, S. 225.

H. Schroeter, Konstruktion des achten Schnittpunktes dreier Oberflächen zweiter Ordnung, Kroneckers Journ. Bd. 99, S. 131.

R. Sturm, Über den achten Schnittpunkt dreier Flächen zweiter Ordnung, Kroneckers Journ. Bd. 99, S. 317.

H. G. Zeuthen: Construction du huitième point commun aux surfaces du second ordre, qui passent par sept points donnés, Kroneckers Journ. Bd. 99, S. 320.

Vgl. auch die neuerdings erschienenen Arbeiten:

H. Dobriner: Über das räumliche Achteck, welches die Schnittpunkte dreier Oberflächen zweiter Ordnung bilden (Acta mathematica 12: 3 und 4, S. 339).

H. G. Zeuthen, Note sur les huit points d'intersection de trois surfaces du second ordre (Acta math. 12: 3 u. 4, S. 362).

durch letztere die drei Raumkurven, welche die Schnitte je zweier Flächen

$$F^{(2)}F_1^{(2)}, \quad F^{(2)}F_2^{(2)}, \quad F_1^{(2)}F_2^{(2)}$$

sind. Solche acht Punkte besitzen aber die Eigenschaft, daß jede Fläche zweiter Ordnung, die durch sieben derselben geht, auch durch den achten gehen muß. Wir können also unendlich viele Raumkurven $C_I^{(4)}$ erhalten, die durch dieselben acht associierten Punkte gehen.

Hieraus folgt umgekehrt, daß zwei verschiedene Raumkurven $C_I^{(4)}$ im allgemeinen nicht mehr als acht Punkte gemein haben können; wenn also zwei $C_I^{(4)}$ neun Punkte gemein haben, so müssen sie identisch zusammenfallen; denn da sieben solche gemeinsame Punkte immer nur einen achten associierten Punkt bestimmen, so geht durch diese und den neunten Punkt nur eine einzige $C_I^{(4)}$. Dies läßt sich auch so aussprechen:

Wenn eine $F^{(2)}$ mit einer $C_I^{(4)}$ neun Punkte gemein hat, so geht die $F^{(2)}$ durch die ganze $C_I^{(4)}$, hat also alle Punkte mit ihr gemein.

§ 2. Konstruktion der $C_I^{(4)}$ durch acht willkürlich und unabhängig von einander gegebene Punkte.

Durch acht willkürlich und unabhängig von einander im Raume gegebene Punkte lassen sich unendlich viele Hyperboloide legen, als deren Durchschnittskurve die gesuchte $C_I^{(4)}$ bestimmt wird. Bezeichnen wir die gegebenen acht Punkte durch

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{A}_1 12345,$$

so ziehe man die Gerade $|\mathfrak{A}\mathfrak{B}|$ und bilde das Büschel der fünf Ebenen

$$|\mathfrak{A}\mathfrak{B}|(12345)$$

und ziehe die fünf Strahlen

$$\mathfrak{A}_1(12345),$$

dann giebt es durch $\mathfrak{A}_1$ einen einzigen bestimmten Strahl x_1 von solcher Beschaffenheit, daß die Projektivität erfüllt wird:

$$|\mathfrak{A}\mathfrak{B}|(12345) \barwedge x_1(12345).$$

Die Konstruktion des gesuchten Strahls x_1 liefert das bekannte Chasles'sche Problem der Projektivität, denn durchschneiden wir die ganze Figur mit einer beliebigen Ebene, so erhalten wir aus dem Ebenenbüschel $|\mathfrak{A}\mathfrak{B}|(12345)$ ein Strahlenbüschel

$$\mathfrak{O}(l_1 l_2 l_3 l_4 l_5),$$

und die fünf Strahlen $\mathfrak{A}_1(12345)$ liefern uns in der Schnittebene fünf Punkte $\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_4\mathfrak{p}_5$. In der Ebene ist dann ein Punkt $\mathfrak{x}_1$ zu finden von solcher Beschaffenheit, daß die Projektivität erfüllt wird:

$$\mathfrak{O}(l_1 l_2 l_3 l_4 l_5) \barwedge \mathfrak{x}_1(\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_4\mathfrak{p}_5).$$

Durch diese Bedingung ist der gesuchte Punkt $\mathfrak{x}_1$ vollständig und eindeutig bestimmt und kann durch folgende fertige lineare Konstruktion hergestellt werden:

Man durchschneide das Strahlbüschel

$$\mathfrak{O}(l_1 l_2 l_3 l_4 l_5)$$

durch eine beliebige Gerade g und erhält auf derselben die Punktreihe

$$\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4\mathfrak{a}_5;$$

verbindet man unter den gegebenen fünf Punkten

$$\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_4\mathfrak{p}_5$$

die Punkte $\mathfrak{p}_1$ $\mathfrak{p}_2$ und zieht von dem Schnittpunkte

$$(\mathfrak{a}_1\mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{a}_2\mathfrak{p}_2) = \mathfrak{S}_{12}$$

die drei Strahlen $|\mathfrak{S}_{12}\mathfrak{a}_3|$ $|\mathfrak{S}_{12}\mathfrak{a}_4|$ $|\mathfrak{S}_{12}\mathfrak{a}_5|$, welche der Geraden $|\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2|$ in $\mathfrak{b}_3\mathfrak{b}_4\mathfrak{b}_5$ begegnen, so ist wegen der perspektiven Lage offenbar

$$(\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4\mathfrak{a}_5) \barwedge (\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2\mathfrak{b}_3\mathfrak{b}_4\mathfrak{b}_5);$$

bestimmt man dann die Punkte:

$$(\mathfrak{b}_3\mathfrak{p}_3,\ \mathfrak{b}_4\mathfrak{p}_4) = \mathfrak{q}_4; \quad (\mathfrak{b}_3\mathfrak{p}_3,\ \mathfrak{b}_5\mathfrak{p}_5) = \mathfrak{q}_5,$$

so ist

$$(\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4) \barwedge \mathfrak{q}_4(\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_4); \quad (\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_5) \barwedge \mathfrak{q}_5(\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_5).$$

Der durch die fünf Punkte $[\mathfrak{q}_4\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_4]$ gelegte Kegelschnitt besitzt also die Eigenschaft, daß jeder seiner Punkte mit $\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_4$ verbunden ein Strahlbüschel liefert, welches das Doppelverhältnis $(\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4)$ oder $(l_1 l_2 l_3 l_4)$ besitzt. Ebenso hat der durch die fünf Punkte $[\mathfrak{q}_5\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_5]$ gelegte Kegel-

schnitt die Eigenschaft, daß jeder seiner Punkte mit $\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_5$ verbunden ein Strahlbüschel liefert, welches das Doppelverhältnis $(\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_5)$ oder $(l_1 l_2 l_3 l_5)$ besitzt. Diese beiden Kegelschnitte haben aber die drei Punkte $\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$ gemeinschaftlich; ihr vierter gemeinschaftlicher Punkt wird also beide Eigenschaften vereinigen und daher der gesuchte Punkt sein.

Ferner liegen die drei Punkte $\mathfrak{p}_3\mathfrak{q}_4\mathfrak{q}_5$ auf einer Geraden, d. h. eine durch den gemeinschaftlichen Punkt $\mathfrak{p}_3$ beider Kegelschnitte gehende Gerade begegnet zum zweitenmal dem einen Kegelschnitte in $\mathfrak{q}_4$, dem andern in $\mathfrak{q}_5$.

Wir ziehen jetzt in gleicher Weise die Verbindungslinie $|\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_3|$ und von dem Schnittpunkte

$$(\mathfrak{a}_1\mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{a}_3\mathfrak{p}_3) = \mathfrak{S}_{13}$$

die drei Strahlen $|\mathfrak{S}_{13}\mathfrak{a}_2|$ $|\mathfrak{S}_{13}\mathfrak{a}_4|$ $|\mathfrak{S}_{13}\mathfrak{a}_5|$, welche der Geraden $|\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_3|$ in $\mathfrak{c}_2\mathfrak{c}_4\mathfrak{c}_5$ begegnen, dann ist wegen der perspektiven Lage offenbar

$$(\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4\mathfrak{a}_5) \barwedge (\mathfrak{p}_1\mathfrak{c}_2\mathfrak{p}_3\mathfrak{c}_4\mathfrak{c}_5);$$

bestimmt man die Punkte

$$(\mathfrak{c}_2\mathfrak{p}_2,\ \mathfrak{c}_4\mathfrak{p}_4) = \mathfrak{q}_4', \quad (\mathfrak{c}_2\mathfrak{p}_2,\ \mathfrak{c}_5\mathfrak{p}_5) = \mathfrak{q}_5',$$

so wird

$$(\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4) \barwedge \mathfrak{q}_4'(\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_4); \quad (\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_5) \barwedge \mathfrak{q}_5'(\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_5);$$

also gehören die neuen Punkte $\mathfrak{q}_4'$ und $\mathfrak{q}_5'$ ebenfalls bez. den vorigen beiden Kegelschnitten an, deren vierten gemeinschaftlichen Punkt wir aufsuchen; und es liegen die drei Punkte $\mathfrak{p}_2\mathfrak{q}_4'\mathfrak{q}_5'$ auf einer Geraden, die durch den gemeinschaftlichen Punkt $\mathfrak{p}_2$ der beiden Kegelschnitte hindurchgeht und zum zweitenmal dem einen Kegelschnitte in $\mathfrak{q}_4'$, dem andern in $\mathfrak{q}_5'$ begegnet.

Wir ziehen endlich noch die Verbindungslinie $|\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3|$ und von dem Schnittpunkte

$$(\mathfrak{a}_2\mathfrak{p}_2,\ \mathfrak{a}_3\mathfrak{p}_3) = \mathfrak{S}_{23}$$

die drei Strahlen $|\mathfrak{S}_{23}\mathfrak{a}_1|$, $|\mathfrak{S}_{23}\mathfrak{a}_4|$, $|\mathfrak{S}_{23}\mathfrak{a}_5|$, welche der Geraden $|\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3|$ in den Punkten $\mathfrak{d}_1\mathfrak{d}_4\mathfrak{d}_5$ begegnen, dann ist wegen der perspektiven Lage offenbar

$$(\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4\mathfrak{a}_5) \barwedge (\mathfrak{d}_1\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3\mathfrak{d}_4\mathfrak{d}_5);$$

bestimmt man nun die Punkte:

$$(\mathfrak{d}_1\mathfrak{p}_1, \mathfrak{d}_4\mathfrak{p}_4) = \mathfrak{q}_4''; \quad (\mathfrak{d}_1\mathfrak{p}_1, \mathfrak{d}_5\mathfrak{p}_5) = \mathfrak{q}_5'',$$

so wird

$$(\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4) \barwedge \mathfrak{q}_4''(\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_4); \quad (\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_5) \barwedge \mathfrak{q}_5''(\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_5);$$

also gehören die neuen Punkte $\mathfrak{q}_4''\mathfrak{q}_5''$ ebenfalls den vorigen beiden Kegelschnitten an, deren vierten gemeinschaftlichen Punkt wir aufsuchen, und es liegen $\mathfrak{p}_1\mathfrak{q}_4''\mathfrak{q}_5''$ auf einer Geraden, die durch den gemeinschaftlichen Punkt $\mathfrak{p}_1$ der beiden Kegelschnitte hindurchgeht und zum zweitenmal dem einen Kegelschnitte in $\mathfrak{q}_4''$, dem andern in $\mathfrak{q}_5''$ begegnet.

Jetzt ist es sehr leicht, den vierten gemeinschaftlichen Punkt der beiden Kegelschnitte zu konstruieren, wenn man sich des bekannten Satzes erinnert: „Haben drei Kegelschnitte eine gemeinschaftliche Sekante, so schneiden sich die drei übrigen gemeinschaftlichen Sekanten je zweier derselben in einem Punkte.“

Betrachten wir nämlich die beiden Kegelschnitte, welche die Punkte enthalten

$$[\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_4\mathfrak{q}_4\mathfrak{q}_4'\mathfrak{q}_4'']$$

und

$$[\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_5\mathfrak{q}_5\mathfrak{q}_5'\mathfrak{q}_5''],$$

und nehmen als dritten Kegelschnitt einmal das Linienpaar $|\mathfrak{p}_3\mathfrak{q}_4\mathfrak{q}_5|$ und $|\mathfrak{p}_2\mathfrak{q}_4'\mathfrak{q}_5'|$ hinzu, so ist $|\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3|$ eine gemeinschaftliche Sekante für alle drei Kegelschnitte; die übrigen gemeinschaftlichen Sekanten des dritten mit dem ersten bez. zweiten Kegelschnitte sind

$$|\mathfrak{q}_4\mathfrak{q}_4'| \text{ und } |\mathfrak{q}_5\mathfrak{q}_5'|,$$

folglich muß der Schnittpunkt beider auf der zweiten gemeinsamen Sekante der beiden ersten Kegelschnitte liegen, d. h. mit $\mathfrak{p}_1$ verbunden diese Sekante liefern, also wenn wir bezeichnen

$$(\mathfrak{q}_4\mathfrak{q}_4', \mathfrak{q}_5\mathfrak{q}_5') = \mathfrak{P}_1,$$

so muß $|\mathfrak{P}_1\mathfrak{p}_1|$ durch den gesuchten vierten gemeinschaftlichen Punkt der beiden ermittelten Kegelschnitte gehen; in gleicher Weise finden wir, wenn

$$(\mathfrak{q}_4\mathfrak{q}_4'', \mathfrak{q}_5\mathfrak{q}_5'') = \mathfrak{P}_2,$$

$$(\mathfrak{q}_4'\mathfrak{q}_4'', \mathfrak{q}_5'\mathfrak{q}_5'') = \mathfrak{P}_3$$

bezeichnet wird, daß auch die beiden Verbindungslinien $|\mathfrak{P}_2\mathfrak{p}_2|$ und $|\mathfrak{P}_3\mathfrak{p}_3|$ durch den gesuchten Punkt hindurchgehen, wodurch dieser also schon mehr als bestimmt ist, da wir drei durch ihn gehende Gerade konstruiert haben.

Nach Lösung dieser Hülfsaufgabe kehren wir zu unserem eigentlichen Problem zurück. Ist der Punkt $\mathfrak{x}$ in der Schnittebene gefunden, so giebt uns die Verbindungslinie $|\mathfrak{A}_1\mathfrak{x}_1| = x_1$ den gesuchten Strahl x_1, so daß die beiden projektiven Ebenenbüschel $|\mathfrak{A}\mathfrak{B}|(12345) \barwedge |\mathfrak{A}_1\mathfrak{x}_1|(12345)$ ein Hyperboloid erzeugen, welches durch die gegebenen acht Punkte hindurchgeht.

Durch eine beliebige Vertauschung der gegebenen acht Punkte unter einander und nachmalige Ausführung derselben Konstruktion erhalten wir ein zweites Hyperboloid, und die Schnittlinie beider Hyperboloide ist die gesuchte $C_I^{(4)}$.

Hat man durch $C_I^{(4)}$ ein Hyperboloid $H^{(2)}$ gelegt und zieht in einem beliebigen Punkte $\mathfrak{p}$ desselben die Berührungsebene, welche es in einem Linienpaare lg schneidet, dessen Schnittpunkt $\mathfrak{p}$ ist, so wird die Ebene $[lg]$ der $C_I^{(4)}$ im allgemeinen in vier Punkten begegnen, den Grundpunkten eines Kegelschnittbüschels, von welchem lg ein Linienpaar ist; da auf diesem die Grundpunkte nicht zu 0 und 4, oder 1 und 3, sondern nur zu 2 und 2 verteilt liegen können (allerdings auch paarweise konjugiert-imaginär sein können), so schließen wir:

Jede Erzeugende der einen oder andern Regelschar eines durch die $C_I^{(4)}$ gelegten Hyperboloids $H^{(2)}$ begegnet der Raumkurve im allgemeinen in zwei Punkten (die auch konjugiert-imaginär sein können).

Hieraus folgt:

Durch einen beliebigen Punkt $\mathfrak{P}$ des Raumes, der nicht auf der $C_I^{(4)}$ selbst liegt, gehen im allgemeinen zwei Sekanten der Raumkurve $C_I^{(4)}$, deren jede der $C_I^{(4)}$ in einem Punktepaare begegnet.

Denn durch den Punkt $\mathfrak{P}$ und die $C_I^{(4)}$ geht nur eine einzige, völlig bestimmte $F^{(2)}$ (Seite 3), und die Berührungsebene derselben im Punkte $\mathfrak{P}$ schneidet die $F^{(2)}$ in einem

(reellen oder konjugiert-imaginären) Linienpaar lg, welches die gesuchten Sekanten bildet.

Hieraus folgt weiter:

Die Projektion einer $C_I^{(4)}$ von einem Punkte $\mathfrak{P}$, der nicht auf der Raumkurve selbst liegt, ist ein Kegel $\mathfrak{P}_{2d}^{(4)}$ vierter Ordnung mit zwei Doppelkanten.

Umgekehrt sehen wir:

Durch eine beliebige Sekante der Raumkurve $C_I^{(4)}$, welche ihr in zwei Punkten begegnet, giebt es nur ein einziges bestimmtes Hyperboloid $H^{(2)}$, welches die ganze Raumkurve enthält.

Denn nehmen wir einen beliebigen Punkt $\mathfrak{P}$ der Sekante, so geht durch $\mathfrak{P}$ und die $C_I^{(4)}$ nur eine einzige $F^{(2)}$, die ein Hyperboloid sein muß, weil sie drei Punkte einer Geraden enthält.

Dies können wir auch so aussprechen:

Legt man durch eine Sekante $|\mathfrak{A}\mathfrak{B}|$ der Raumkurve $C_I^{(4)}$ ein Ebenenbüschel, so schneidet jede Ebene des Büschels die $C_I^{(4)}$ noch in zwei weiteren Punkten, deren Verbindungslinie eine Regelschar eines Hyperboloids $H^{(2)}$ beschreibt, welches durch die ganze $C_I^{(4)}$ hindurchgeht. Die Sekante $|\mathfrak{A}\mathfrak{B}|$ selbst gehört der zweiten Regelschar dieses Hyperboloids an.

Lassen wir insbesondere die Sekante $|\mathfrak{A}\mathfrak{B}|$ durch Zusammenrücken der beiden Punkte $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ in eine Tangente der $C_I^{(4)}$ übergehen, so folgt:

Durch eine beliebige Tangente der $C_I^{(4)}$ giebt es nur ein einziges Hyperboloid, welches die ganze $C_I^{(4)}$ enthält.

Beiläufig und als selbstverständlich bemerken wir, daß es keine Gerade im Raume giebt, die der $C_I^{(4)}$ in drei Punkten begegnen könnte, denn sonst müßten alle $F^{(2)}$, die durch die Raumkurve gehen, diese Gerade enthalten; es wäre also die $C_I^{(4)}$ nicht der vollständige Schnitt zweier Flächen $F^{(2)}$; wir hätten es nicht mit einer Raumkurve vierter Ordnung erster Species zu thun, die wir allein betrachten, sondern mit einer Raumkurve vierter Ordnung zweiter Species $C_{II}^{(4)}$, durch welche

nur ein einziges Hyperboloid geht, dessen Erzeugende einer Regelschar der $C_{II}^{(4)}$ allemal in drei und die der andern Regelschar nur in einem Punkte begegnen.*

Wenn wir die $C_I^{(4)}$ von einem ihrer Punkte $\mathfrak{p}$ aus projicieren, so erhalten wir einen allgemeinen Kegel dritter Ordnung $\mathfrak{p}^{(3)}$ ohne Doppelkante, denn jede durch $\mathfrak{p}$ gelegte Ebene begegnet der $C_I^{(4)}$ noch in drei weiteren Punkten, die mit $\mathfrak{p}$ verbunden drei Kegelstrahlen liefern, und da es durch $\mathfrak{p}$ keine Gerade giebt, die der $C_I^{(4)}$ in zwei weiteren Punkten begegnen könnte, so hat der Kegel $\mathfrak{p}^{(3)}$ keinen Doppelstrahl.

Wenn wir von zwei verschiedenen Punkten $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}_1$ der $C_I^{(4)}$ aus dieselbe projicieren, so erhalten wir zwei Kegel $\mathfrak{p}^{(3)}$ und $\mathfrak{p}_1^{(3)}$, die den Kegelstrahl $|\mathfrak{p}\mathfrak{p}_1|$ gemeinschaftlich haben und sich in der $C_I^{(4)}$ durchschneiden; dieselben haben aber noch weitere gemeinschaftliche Punkte, deren Ort wir ermitteln wollen.

Eine beliebige durch $|\mathfrak{p}\mathfrak{p}_1|$ gelegte Ebene begegnet der $C_I^{(4)}$ noch in zwei weiteren Punkten $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$, und die beiden Kegel gehen nicht allein durch $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$, sondern auch durch die Schnittpunkte:

$$(\mathfrak{p}\mathfrak{x},\ \mathfrak{p}_1\mathfrak{y}) = \mathfrak{q}, \quad (\mathfrak{p}\mathfrak{y},\ \mathfrak{p}_1\mathfrak{x}) = \mathfrak{r},$$

die nicht auf der Raumkurve $C_I^{(4)}$ liegen. Um den Ort dieser beiden Punkte $\mathfrak{q}$ $\mathfrak{r}$ zu ermitteln, nehmen wir den Schnittpunkt

$$(\mathfrak{p}\mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{x}\mathfrak{y}) = \mathfrak{s}$$

* A. Cayley, Mémoire sur les courbes à double courbure et les surfaces développables (Liouville Journal de mathématiques tome X, p. 245).

G. Salmon, On the classification of curves of double curvature (Cambridge and Dublin math. Journal vol. V, 1850).

J. Steiner, Ueber die Flächen dritten Grades (Borchardts Journal für die r. und a. Math. Bd. 53, S. 133).

L. Cremona, Intorno alla curva gobba del quart' ordine, per la quale passa una sola superficie di secondo grado, Bologna 1861.

St. Jolles, Die Theorie der Osculanten und des Sehnensystems der Raumkurve IV. Ordnung II. Species (Aachen 1886).

und betrachten die $C_I^{(4)}$ als den vollständigen Schnitt zweier Flächen $F_1^{(2)}$ und $F_2^{(2)}$. Verändert sich nun bei der Drehung der Ebene $[\mathfrak{p}\mathfrak{p}_1\mathfrak{x}\mathfrak{y}]$ um den Strahl $|\mathfrak{p}\mathfrak{p}_1|$ der Punkt $\mathfrak{s}$, so verändert sich auch $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{r}$; es ist aber $|\mathfrak{q}\mathfrak{r}|$ immer die Polare von $\mathfrak{s}$ in Bezug auf die beiden Kegelschnitte, in welchen die veränderliche Ebene durch $|\mathfrak{p}\mathfrak{p}_1|$ die beiden Flächen $F_1^{(2)}$ und $F_2^{(2)}$ durchschneidet; es liegt also auch $|\mathfrak{q}\mathfrak{r}|$ immer in den beiden Polarebenen von $\mathfrak{s}$ in Bezug auf die Flächen $F_1^{(2)}$ und $F_2^{(2)}$.

Während nun $\mathfrak{s}$ auf der Geraden $|\mathfrak{p}\mathfrak{p}_1|$ sich bewegt, beschreiben die beiden Polarebenen zwei Ebenenbüschel um zwei feste Axen und sind projektiv mit der von $\mathfrak{s}$ durchlaufenen Punktreihe. Die Schnittlinie $|\mathfrak{q}\mathfrak{r}|$ entsprechender Ebenen der beiden projektiven Ebenenbüschel beschreibt also eine Regelschar eines Hyperboloids $\mathfrak{H}^{(2)}$. Nennen wir die Axen der beiden projektiven Ebenenbüschel g_1 und g_2, so werden, da die Gerade $|\mathfrak{q}\mathfrak{r}|$ immer der festen Geraden $|\mathfrak{p}\mathfrak{p}_1|$ begegnet, die drei Strahlen $|\mathfrak{p}\mathfrak{p}_1|$ g_1 g_2 das Hyperboloid $\mathfrak{H}^{(2)}$ vollständig bestimmen, indem sie einer Regelschar desselben angehören. Die durch $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}_1$ gehenden beiden Erzeugenden der andern Regelschar p und p_1 sind nicht allein Erzeugende des Hyperboloids $\mathfrak{H}^{(2)}$, sondern auch beziehlich Kegelstrahlen von $\mathfrak{p}^{(3)}$ und $\mathfrak{p}_1^{(3)}$, weil ein Strahl $|\mathfrak{p}\mathfrak{q}|$ gleichzeitig durch $\mathfrak{x}$ und ein Strahl $|\mathfrak{p}_1\mathfrak{q}|$ gleichzeitig durch $\mathfrak{y}$ geht. Also hat das Hyperboloid $\mathfrak{H}^{(2)}$ mit dem Kegel $\mathfrak{p}^{(3)}$ die beiden Geraden $|\mathfrak{p}\mathfrak{p}_1|$ und p gemein, mithin nur noch eine Raumkurve vierter Ordnung erster Species $C_I^{(4)\prime}$. Die beiden Kegel $\mathfrak{p}^{(3)}$ und $\mathfrak{p}_1^{(3)}$ haben also außer dem Kegelstrahle $|\mathfrak{p}\mathfrak{p}_1|$ und der gegebenen Raumkurve $C_I^{(4)}$ noch eine zweite Raumkurve $C_I^{(4)\prime}$ gemeinschaftlich, den gesuchten Ort der Punkte $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{r}$.

Da die Schnittkurve einer beliebigen Ebene mit einem Kegel $\mathfrak{p}^{(3)}$, der die Perspektive der $C_I^{(4)}$ aus einem ihrer Punkte $\mathfrak{p}$ ist, eine allgemeine ebene Kurve dritter Ordnung $\mathfrak{K}^{(3)}$ ist, so wird man von den Eigenschaften der $\mathfrak{K}^{(3)}$ zu denen der $C_I^{(4)}$ aufsteigen können oder umgekehrt; ebenso wird man von dem Kegel $\mathfrak{P}_{2d}^{(4)}$ zu den Eigenschaften einer

ebenen Kurve $\mathfrak{K}_{2d}^{(4)}$ vierter Ordnung mit zwei Doppelpunkten gelangen vermittelst der Raumkurve $C_I^{(4)}$ oder umgekehrt.*

§ 3. Tangente und Schmiegungsebene in einem Punkte der $C_I^{(4)}$.

Legt man durch die $C_I^{(4)}$ ein Hyperboloid $H^{(2)}$, so gehen durch einen beliebigen Punkt $\mathfrak{A}$ der Raumkurve zwei Erzeugende desselben aus seinen beiden Regelscharen, g und l; die Ebene $[gl]$ ist die Berührungsebene des Hyperboloids im Punkte $(gl) = \mathfrak{A}$. Diese Ebene $[gl]$ enthält daher die Tangente $t_{\mathfrak{A}}$ im Punkte $\mathfrak{A}$ der $C_I^{(4)}$. Verändert man das Hyperboloid durch die $C_I^{(4)}$, so dreht sich die Berührungsebene $[gl]$ beständig um einen festen Strahl, die Tangente $t_{\mathfrak{A}}$, und beschreibt ein Ebenenbüschel. Die Tangente $t_{\mathfrak{A}}$ wird durch zwei Hyperboloide schon bestimmt.

Die in $\mathfrak{A}$ sich kreuzenden beiden Erzeugenden g und l begegnen der $C_I^{(4)}$ zum zweitenmal in Punkten $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$; durch $\mathfrak{B}$ geht eine zweite Erzeugende l_1 der andern Regelschar und möge der $C_I^{(4)}$ zum zweitenmal in $\mathfrak{B}_1$ begegnen; durch $\mathfrak{C}$ geht ebenfalls eine zweite Erzeugende g_1 der andern Regelschar und möge der $C_I^{(4)}$ zum zweitenmal in $\mathfrak{C}_1$ begegnen; dann gehören

$$|\mathfrak{A}\mathfrak{B}| = g \qquad |\mathfrak{C}\mathfrak{C}_1| = g_1 \qquad \text{der einen Regelschar,}$$
$$|\mathfrak{A}\mathfrak{C}| = l \qquad |\mathfrak{B}\mathfrak{B}_1| = l_1 \qquad \text{der andern Regelschar}$$

des Hyperboloids an; es müssen sich also auch $|\mathfrak{B}\mathfrak{B}_1|$ und $|\mathfrak{C}\mathfrak{C}_1|$ begegnen, d. h. $\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1$ liegen in einer Ebene oder $|\mathfrak{B}\mathfrak{C}|$ trifft $|\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1|$. Da nun die Ebene $[\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}]$ die Tangente $t_{\mathfrak{A}}$ enthält, so muß das einzige Hyperboloid, welches durch $t_{\mathfrak{A}}$ und die ganze Raumkurve $C_I^{(4)}$ gelegt werden kann (S. 10), die Gerade $|\mathfrak{B}\mathfrak{C}|$ als Erzeugende der andern Regelschar, zu der $t_{\mathfrak{A}}$ nicht gehört, enthalten; andererseits geht auch durch die Sekante $|\mathfrak{B}\mathfrak{C}|$ und die ganze Raumkurve $C_I^{(4)}$ nur ein einziges Hyperboloid (S. 10), welches also mit dem vorigen identisch sein muß, und da $\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1$ in einer Ebene liegen,

* A. Milinowski, Zur Theorie der Raumcurven vierter Ordnung erster Art, Kroneckers Journal Bd. 97, S. 277.

so muss auch $|\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1|$ eine Erzeugende dieses Hyperboloids sein und zwar derselben Regelschar wie $t_\mathfrak{A}$ angehören. Dieses durch die Tangente $t_\mathfrak{A}$ und die Raumkurve $C_I^{(4)}$ gelegte Hyperboloid, welches wir $\mathfrak{A}^{(2)}$ nennen wollen, enthält also die Erzeugende $|\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1|$, welche derselben Regelschar wie $t_\mathfrak{A}$ angehört. Die durch $\mathfrak{A}$ gehende Erzeugende a der andern Regelschar dieses Hyperboloids $\mathfrak{A}^{(2)}$ wird daher der Erzeugenden $|\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1|$ begegnen müssen, d. h. die Ebene $[\mathfrak{A}\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1]$ wird die Erzeugende a enthalten. Diese Erzeugende a muß aber der $C_I^{(4)}$ in zwei Punkten begegnen, von denen der eine $\mathfrak{A}$ selbst ist, der andere sei $\mathfrak{A}_1$, dann wird die Ebene $[t_\mathfrak{A} a]$ in $\mathfrak{A}$ drei zusammenfallende Punkte der Raumkurve enthalten, also die Schmiegungsebene derselben im Punkte $\mathfrak{A}$ sein und zum vierten Schnittpunkte mit $C_I^{(4)}$ den Punkt $\mathfrak{A}_1$ haben, den wir den zu $\mathfrak{A}$ gehörigen „Schmiegungspunkt" nennen wollen; der Strahl $|\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1| = a$ soll der zu $\mathfrak{A}$ gehörige „Schmiegungsstrahl" heißen. Das durch die Tangente $t_\mathfrak{A}$ und die Raumkurve gelegte Hyperboloid hat also zur zweiten durch $\mathfrak{A}$ gehenden Erzeugenden den zu $\mathfrak{A}$ gehörigen Schmiegungsstrahl.

Die Konstruktion der Tangente $t_\mathfrak{A}$ und der Schmiegungsebene $\tau_\mathfrak{A}$ im Punkte $\mathfrak{A}$ der $C_I^{(4)}$ ergiebt sich also auf folgende Weise:

Legt man durch die $C_I^{(4)}$ ein beliebiges Hyperboloid und geht von dem Punkte $\mathfrak{A}$ auf einer der beiden in $\mathfrak{A}$ sich kreuzenden Erzeugenden des Hyperboloids bis zum Punkte $\mathfrak{B}$ der Raumkurve, von $\mathfrak{B}$ auf der andern durch $\mathfrak{B}$ gehenden Erzeugenden bis zum Punkte $\mathfrak{B}_1$ der Raumkurve, geht man andererseits auf der zweiten durch $\mathfrak{A}$ gehenden Erzeugenden bis zum Punkte $\mathfrak{C}$ der Raumkurve und von $\mathfrak{C}$ auf der andern durch $\mathfrak{C}$ gehenden Erzeugenden bis zum Punkte $\mathfrak{C}_1$ der Raumkurve, so enthält die Ebene $[\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}]$ die Tangente $t_\mathfrak{A}$ der $C_I^{(4)}$ im Punkte $\mathfrak{A}$ und die Ebene $[\mathfrak{A}\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1]$ den Schmiegungsstrahl, der zum Punkte $\mathfrak{A}$ gehört. Verändert man das durch die Raumkurve gelegte Hyperboloid $H^{(2)}$, so muß die so konstruierte veränderliche Ebene $[\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}]$ um die feste

Tangente $t_{\mathfrak{A}}$ sich drehen und die veränderliche Ebene $[\mathfrak{A}\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1]$ um den festen zu $\mathfrak{A}$ gehörigen Schmiegungsstrahl a. Durch zwei Hyperboloide $H^{(2)}$ sind also Tangente und Schmiegungsstrahl schon bestimmt, und die Ebene $[t_{\mathfrak{A}}a] = \tau_{\mathfrak{A}}$ ist die Schmiegungsebene im Punkte $\mathfrak{A}$ der $C_I^{(4)}$.

Es kann insbesondere vorkommen, daß die Punkte $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{C}_1$ zusammenfallen in einen Punkt $\mathfrak{D}$, daß also ein geschlossenes windschiefes Vierseit auf dem Hyperboloid verläuft, dessen Ecken der $C_I^{(4)}$ angehören; sobald ein solches windschiefes Vierseit $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}$ existiert, giebt es unendlich viele derselben, d. h. ein solches Vierseit schließt sich immer, von welchem Punkte $\mathfrak{A}$ der Raumkurve man auch ausgehen mag. Wir werden später (§ 10) solche besonderen durch die $C_I^{(4)}$ gehenden Hyperboloide kennen lernen, wollen aber ihre charakteristische Eigenschaft hier schon nachweisen.

Habe das durch die $C_I^{(4)}$ gelegte Hyperboloid die besondere Eigenschaft, daß, wenn die beiden in $\mathfrak{A}$ sich kreuzenden Erzeugenden $|\mathfrak{A}\mathfrak{B}|$ und $|\mathfrak{A}\mathfrak{C}|$ der Raumkurve in $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ zum andern Mal begegnen, die beiden übrigen Erzeugenden durch $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ sich in demselben Punkte $\mathfrak{D}$ der Raumkurve begegnen, also das geschlossene windschiefe Vierseit $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{D}\mathfrak{C}$ die Gegenseiten

$|\mathfrak{A}\mathfrak{B}|$ und $|\mathfrak{C}\mathfrak{D}|$ der einen Regelschar,
$|\mathfrak{A}\mathfrak{C}|$ und $|\mathfrak{B}\mathfrak{D}|$ der andern Regelschar

angehörig hat, und geht man von einem beliebigen Punkte $\mathfrak{A}'$ der $C_I^{(4)}$ auf der einen Erzeugenden nach dem Punkte $\mathfrak{B}'$ der Raumkurve, auf der andern nach dem Punkte $\mathfrak{C}'$ derselben, ferner von $\mathfrak{B}'$ auf der zweiten Erzeugenden bis zum Punkte $\mathfrak{D}'$ und von $\mathfrak{C}'$ auf der zweiten bis zum Punkte $\mathfrak{x}$ der $C_I^{(4)}$, dann muß $\mathfrak{D}'$ mit $\mathfrak{x}$ zusammenfallen; denn wir haben die Erzeugenden

$|\mathfrak{A}\mathfrak{B}|$ $|\mathfrak{C}\mathfrak{D}|$ $|\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'|$ $|\mathfrak{C}'\mathfrak{x}|$ der einen,
$|\mathfrak{A}\mathfrak{C}|$ $|\mathfrak{B}\mathfrak{D}|$ $|\mathfrak{A}'\mathfrak{C}'|$ $|\mathfrak{B}'\mathfrak{D}'|$ der andern

Regelschar desselben Hyperboloids, und es treffen sich bekanntlich je zwei Erzeugende verschiedener Regelscharen. Da nun $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{A}'\mathfrak{C}'$ in einer Ebene liegen, so muß ein Hyper-

boloid, welches durch $|\mathfrak{B}\mathfrak{C}'|$ und die Raumkurve gelegt wird, die Erzeugende $|\mathfrak{A}\mathfrak{A}'|$ enthalten; es giebt aber nur ein einziges solches Hyperboloid (S. 10). Da ferner $\mathfrak{A}\mathfrak{C}\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'$ in einer Ebene liegen, so muß das durch $|\mathfrak{A}\mathfrak{A}'|$ und die Raumkurve gelegte Hyperboloid, d. h. das vorige, auch $|\mathfrak{B}'\mathfrak{C}|$ als Erzeugende enthalten, also gehören $|\mathfrak{B}\mathfrak{C}'|$ und $|\mathfrak{B}'\mathfrak{C}|$ derselben Regelschar dieses Hyperboloids an; da ferner $\mathfrak{B}'\mathfrak{C}\mathfrak{D}\mathfrak{D}'$ in einer Ebene liegen, so muß das durch $|\mathfrak{B}'\mathfrak{C}|$ und die Raumkurve gelegte Hyperboloid, d. h. das vorige, auch $|\mathfrak{D}\mathfrak{D}'|$ als Erzeugende enthalten, also gehören $|\mathfrak{B}\mathfrak{C}'|$ und $|\mathfrak{D}\mathfrak{D}'|$ verschiedenen Regelscharen an, treffen sich daher; die vier Punkte $\mathfrak{B}\mathfrak{C}'\mathfrak{D}\mathfrak{D}'$ liegen also in einer Ebene; da nun auch $\mathfrak{B}\mathfrak{D}\mathfrak{C}'\mathfrak{x}$ in einer Ebene liegen, und die Ebene $[\mathfrak{B}\mathfrak{C}'\mathfrak{D}]$ nur noch einen einzigen vierten Punkt der Raumkurve enthalten kann, so muß

$$\mathfrak{x} \equiv \mathfrak{D}'$$

sein, d. h. das zweite Vierseit $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'\mathfrak{D}'\mathfrak{C}'$, welches auf dem Hyperboloid verläuft und der Raumkurve einbeschrieben ist, schließt sich auch, sobald sich das erste schließt.

Wir können also den Satz aussprechen:

Wenn man durch eine $C_I^{(4)}$ ein Hyperboloid $H^{(2)}$ hindurchlegt, welches die Eigenschaft besitzt, daß es einmal ein der $C_I^{(4)}$ einbeschriebenes windschiefes Vierseit giebt, dessen beide Paare Gegenseiten den beiden Regelscharen des Hyperboloids angehören, dann giebt es unendlich viele solcher der Raumkurve einbeschriebenen windschiefen Vierseite, die auf dem Hyperboloid verlaufen, d. h. jeder Punkt der Raumkurve kann als Ausgangspunkt gewählt werden, und das von ihm ausgehende auf dem Hyperboloid verlaufende windschiefe Vierseit schließt sich immer.*

* V. Eberhard, Die Raumkurven vierter Ordnung erster und zweiter Species in ihrem Zusammenhange mit den Steinerschen Schließungsproblemen bei den ebenen Kurven dritter Ordnung (Schloemilch Ztschrft. f. Math. u. Phys. Bd. 32, S. 65).

F. Schur, Über eine besondere Klasse von Flächen vierter Ordnung (Math. Ann. Bd. 20, S. 254).

Wir bemerken noch, daß die Tangente $t_{\mathfrak{A}}$ ein Kegelstrahl des von $\mathfrak{A}$ durch die $C_I^{(4)}$ perspektiv gelegten Kegels $\mathfrak{A}^{(3)}$ ist, die Berührungsebene an $\mathfrak{A}^{(3)}$ längs des Kegelstrahls die Schmiegungsebene $\tau_{\mathfrak{A}}$ und der dritte Schnittstrahl derselben mit dem Kegel $\mathfrak{A}^{(3)}$ der zu $\mathfrak{A}$ gehörige Schmiegungsstrahl wird.

§ 4. Bestimmung der $C_I^{(4)}$ durch zwei Tripel von je drei Punkten und lineare Konstruktion weiterer Punkte der Raumkurve.

Wir können Hyperboloide konstruieren, als deren Schnittkurve $C_I^{(4)}$ hervortritt, indem wir sechs willkürlich und unabhängig von einander im Raume gewählte Punkte in zwei Tripel zu je dreien

$$\begin{matrix} \mathfrak{A}_1 & \mathfrak{A}_2 & \mathfrak{A}_3 \\ \mathfrak{B}_1 & \mathfrak{B}_2 & \mathfrak{B}_3 \end{matrix}$$

verteilen, die neun Verbindungslinien jedes der ersten drei Punkte mit jedem der drei letzteren ziehen:

$$\begin{matrix} |\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1| & |\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_3| & |\mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_2| \\ |\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_3| & |\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2| & |\mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_1| \\ |\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_2| & |\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_1| & |\mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_3| \end{matrix}$$

und durch je drei in einer Horizontalreihe stehende Geraden ein Hyperboloid legen.

Das durch die drei Strahlen

$|\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1| \quad |\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_3| \quad |\mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_2|$ gelegte Hyperboloid $H_1^{(2)}$

und das durch die drei Strahlen

$|\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_3| \quad |\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2| \quad |\mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_1|$ gelegte Hyperboloid $H_2^{(2)}$

schneiden sich in einer $C_I^{(4)}$, von welcher jeder Punkt $\mathfrak{X}$ die Eigenschaft haben muß, daß sowohl die drei Ebenen

$[\mathfrak{X}\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1] \quad [\mathfrak{X}\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_3] \quad [\mathfrak{X}\mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_2]$ sich in einer Geraden s_1,

als auch die drei Ebenen

$[\mathfrak{X}\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_3] \quad [\mathfrak{X}\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2] \quad [\mathfrak{X}\mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_1]$ sich in einer Geraden s_2

schneiden; von den durch den Punkt $\mathfrak{X}$ gehenden Strahlen



liegen also s_1 $|\mathfrak{X}\mathfrak{B}_3|$ $|\mathfrak{X}\mathfrak{A}_2|$ in einer Ebene,

und ebenso s_2 $|\mathfrak{X}\mathfrak{B}_1|$ $|\mathfrak{X}\mathfrak{A}_3|$ in einer Ebene.

Hieraus folgt, daß die drei Schnittlinien je zweier Ebenen

$$|[s_1\mathfrak{X}\mathfrak{B}_1],\quad [s_2\mathfrak{X}\mathfrak{B}_3]| \equiv |\mathfrak{X}\mathfrak{A}_1|$$
$$|[s_1\mathfrak{X}\mathfrak{A}_3],\quad [s_2\mathfrak{X}\mathfrak{A}_2]| \equiv |\mathfrak{X}\mathfrak{B}_2|$$
$$|[\mathfrak{X}\mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_3],\quad [\mathfrak{X}\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_1]|$$

in einer Ebene liegen müssen, oder was dasselbe sagt, daß die drei Ebenen

$$[\mathfrak{X}\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_2] \quad [\mathfrak{X}\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_1] \quad [\mathfrak{X}\mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_3]$$

sich in einer Geraden s_3 schneiden müssen. Dies sagt aus, daß der Punkt $\mathfrak{X}$ auch auf einem dritten Hyperboloid $H_3^{(2)}$ liegen muß, welches durch die drei Geraden

$$|\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_2| \quad |\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_1| \quad |\mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_3|$$

bestimmt wird. Wir erhalten also folgenden Satz:

Nimmt man im Raume sechs beliebige von einander unabhängige Punkte

$$\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3, \quad \mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_3$$

an und legt durch je drei Strahlen

$\|\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\|$	$\|\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_3\|$	$\|\mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_2\|$	ein Hyperboloid	$H_1^{(2)}$
$\|\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_3\|$	$\|\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2\|$	$\|\mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_1\|$	„ „	$H_2^{(2)}$
$\|\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_2\|$	$\|\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_1\|$	$\|\mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_3\|$	„ „	$H_3^{(2)}$,

so schneiden sich diese drei Hyperboloide in einer und derselben Raumkurve $C_I^{(4)}$, welche durch die sechs gegebenen Punkte hindurchgeht.

Jeder Punkt $\mathfrak{X}$ dieser Raumkurve besitzt die Eigenschaft, daß, wenn man von ihm aus die beiden im Raume liegenden Dreiecke $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3$ und $\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_3$ auf eine beliebige Ebene projiziert in die beiden Dreiecke $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3$ und $\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_3$, dieselben dreifach cyklisch-perspektive Lage haben, für welche die drei Perspektivitätscentra die Treffpunkte der Strahlen $s_1 s_2 s_3$ mit der Projektionsebene sind.*

* A. Harnack, Über die Darstellung der Raumkurve vierter Ordnung erster Species und ihres Sekantensystems durch doppeltperiodische Functionen (Math. Ann. Bd. 12, S. 47).

Nimmt man nun die Ebene $[\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_3]$, so wird dieselbe noch einen vierten Punkt der $C_I^{(4)}$ enthalten, den wir $\mathfrak{X}$ nennen wollen; da nun $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_3\mathfrak{X}$ in einer Ebene liegen, und $\mathfrak{X}$ auch auf dem Hyperboloid $H_1^{(2)}$ liegt, also

$$[\mathfrak{X}\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1] \quad [\mathfrak{X}\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_3] \quad [\mathfrak{X}\mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_2]$$

sich in einer Geraden schneiden, so wird die Schnittlinie der beiden ersten Ebenen $|\mathfrak{X}\mathfrak{B}_3|$ auch in der Ebene $[\mathfrak{X}\mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_2]$ liegen müssen; der Punkt $\mathfrak{X}$ muß also auch in der Ebene $[\mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_3]$ liegen; da ferner $\mathfrak{X}$ auch auf dem zweiten Hyperboloid $H_2^{(2)}$ liegt, also

$$[\mathfrak{X}\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_3] \quad [\mathfrak{X}\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2] \quad [\mathfrak{X}\mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_1]$$

sich in einer Geraden schneiden, $|\mathfrak{X}\mathfrak{B}_1|$ aber die Schnittlinie der ersten und dritten Ebene ist, so wird $|\mathfrak{X}\mathfrak{B}_1|$ auch in der Ebene $[\mathfrak{X}\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2]$ liegen müssen; der Punkt $\mathfrak{X}$ muß also auch in der Ebene $[\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2]$ liegen; $\mathfrak{X}$ ist mithin der Schnittpunkt der drei Ebenen

$$[\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_3\mathfrak{B}_1] \quad [\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2] \quad [\mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_3].$$

Wir erhalten durch cyklische Vertauschung von $\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_3$ die drei neuen Punkte der Raumkurve:

$$\left.\begin{array}{l} ([\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_3] \quad [\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_3\mathfrak{B}_1] \quad [\mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2]) = \mathfrak{C}_1 \\ ([\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_3\mathfrak{B}_1] \quad [\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2] \quad [\mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_3]) = \mathfrak{C}_2 \\ ([\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2] \quad [\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_3] \quad [\mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_3\mathfrak{B}_1]) = \mathfrak{C}_3 \end{array}\right\}.$$

Auf gleiche Weise, indem wir die $\mathfrak{A}$'s und $\mathfrak{B}$'s mit einander vertauschen, erhalten wir weitere drei Punkte der Raumkurve:

$$\left.\begin{array}{l} ([\mathfrak{B}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3] \quad [\mathfrak{B}_2\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_1] \quad [\mathfrak{B}_3\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2]) = \mathfrak{D}_1 \\ ([\mathfrak{B}_1\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_1] \quad [\mathfrak{B}_2\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2] \quad [\mathfrak{B}_3\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3]) = \mathfrak{D}_2 \\ ([\mathfrak{B}_1\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2] \quad [\mathfrak{B}_2\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3] \quad [\mathfrak{B}_3\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_1]) = \mathfrak{D}_3 \end{array}\right\}.$$

Die $\mathfrak{A}$'s und $\mathfrak{B}$'s sind aber mit einander vertauschbar, weil wir die neun Strahlen, welche zur Erzeugung der drei Hyperboloide $H_1^{(2)}\, H_2^{(2)}\, H_3^{(2)}$ dienten, auch so schreiben können:

$$\begin{array}{llll} |\mathfrak{B}_1\mathfrak{A}_1| \quad |\mathfrak{B}_2\mathfrak{A}_3| \quad |\mathfrak{B}_3\mathfrak{A}_2| & \text{bestimmen} & H_1^{(2)}, \\ |\mathfrak{B}_1\mathfrak{A}_3| \quad |\mathfrak{B}_2\mathfrak{A}_2| \quad |\mathfrak{B}_3\mathfrak{A}_1| & \quad\text{„} & H_2^{(2)}, \\ |\mathfrak{B}_1\mathfrak{A}_2| \quad |\mathfrak{B}_2\mathfrak{A}_1| \quad |\mathfrak{B}_3\mathfrak{A}_3| & \quad\text{„} & H_3^{(2)}. \end{array}$$

Aus dem Vorigen folgt zunächst, daß die sechs Geraden

$|\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1|$ $|\mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_3|$ $|\mathfrak{B}_3\mathfrak{C}_2|$ $|\mathfrak{A}_1\mathfrak{D}_1|$ $|\mathfrak{A}_2\mathfrak{D}_3|$ $|\mathfrak{A}_3\mathfrak{D}_2|$ einer und derselben Regelschar des Hyperboloids $H_1^{(2)}$,

$|\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_2|$ $|\mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_1|$ $|\mathfrak{B}_3\mathfrak{C}_3|$ $|\mathfrak{A}_1\mathfrak{D}_2|$ $|\mathfrak{A}_2\mathfrak{D}_1|$ $|\mathfrak{A}_3\mathfrak{D}_3|$ einer und derselben Regelschar des Hyperboloids $H_2^{(2)}$,

$|\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_3|$ $|\mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_2|$ $|\mathfrak{B}_3\mathfrak{C}_1|$ $|\mathfrak{A}_1\mathfrak{D}_3|$ $|\mathfrak{A}_2\mathfrak{D}_2|$ $|\mathfrak{A}_3\mathfrak{D}_1|$ einer und derselben Regelschar des Hyperboloids $H_3^{(2)}$

angehören, und zwar sind dies die zweiten Regelscharen auf jedem der drei Hyperboloide, welche je durch die drei Geraden ihrer ersten Regelschar bestimmt wurden (S. 18).

Da $|\mathfrak{B}_1\mathfrak{A}_1|$ und $|\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1|$ den beiden verschiedenen Regelscharen des Hyperboloids $H_1^{(2)}$ angehören, so muß die Ebene $[\mathfrak{B}_1\mathfrak{A}_1\mathfrak{C}_1]$, als Berührungsebene im Punkte $\mathfrak{B}_1$ am Hyperboloid $H_1^{(2)}$, die Tangente $t_{\mathfrak{B}_1}$ der Raumkurve im Punkte $\mathfrak{B}_1$ enthalten; ebenso enthält die Ebene $[\mathfrak{B}_1\mathfrak{A}_3\mathfrak{C}_2]$, als Berührungsebene des Hyperboloids $H_2^{(2)}$ im Punkte $\mathfrak{B}_1$, und endlich auch die Ebene $[\mathfrak{B}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{C}_3]$ dieselbe Tangente; die Schnittlinie dieser drei Ebenen ist also die Tangente, und ebenso erhalten wir die Tangenten in den übrigen Punkten $\mathfrak{B}_2$ $\mathfrak{B}_3$ $\mathfrak{A}_1$ $\mathfrak{A}_2$ $\mathfrak{A}_3$, nämlich:

$$\left.\begin{array}{l} |[\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{D}_1]\quad[\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_2\mathfrak{D}_3]\quad[\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_3\mathfrak{D}_2]| = t_{\mathfrak{A}_1}\\ |[\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_1\mathfrak{D}_2]\quad[\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2\mathfrak{D}_1]\quad[\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_3\mathfrak{D}_3]| = t_{\mathfrak{A}_2}\\ |[\mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_1\mathfrak{D}_3]\quad[\mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_2\mathfrak{D}_2]\quad[\mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_3\mathfrak{D}_1]| = t_{\mathfrak{A}_3}\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} |[\mathfrak{B}_1\mathfrak{A}_1\mathfrak{C}_1]\quad[\mathfrak{B}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{C}_3]\quad[\mathfrak{B}_1\mathfrak{A}_3\mathfrak{C}_2]| = t_{\mathfrak{B}_1}\\ |[\mathfrak{B}_2\mathfrak{A}_1\mathfrak{C}_2]\quad[\mathfrak{B}_2\mathfrak{A}_2\mathfrak{C}_1]\quad[\mathfrak{B}_2\mathfrak{A}_3\mathfrak{C}_3]| = t_{\mathfrak{B}_2}\\ |[\mathfrak{B}_3\mathfrak{A}_1\mathfrak{C}_3]\quad[\mathfrak{B}_3\mathfrak{A}_2\mathfrak{C}_2]\quad[\mathfrak{B}_3\mathfrak{A}_3\mathfrak{C}_1]| = t_{\mathfrak{B}_3}\end{array}\right\}.$$

Aus der Bildungsweise dieser Tangenten erkennen wir, daß die drei Geraden

$$|\mathfrak{B}_1\mathfrak{D}_1|\quad|\mathfrak{B}_2\mathfrak{D}_3|\quad|\mathfrak{B}_3\mathfrak{D}_2|$$

ein Hyperboloid bestimmen, welches die Tangente $t_{\mathfrak{A}_1}$ zu einer Erzeugenden hat, weil $t_{\mathfrak{A}_1}$ allen drei Geraden begegnet; aus der Konstruktion der drei Punkte $\mathfrak{D}_1$ $\mathfrak{D}_2$ $\mathfrak{D}_3$ ersehen wir aber auch, daß die Gerade $|\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3|$ den obigen drei Geraden gleichzeitig begegnet. Also hat das durch die drei ersten

Geraden gelegte Hyperboloid neun Punkte mit der Raumkurve gemein und geht daher durch die ganze Raumkurve $C_I^{(4)}$ (S. 5).

Hiernach erhalten wir sechs neue Hyperboloide, welche die ganze Raumkurve enthalten und durch je eine Tangente derselben in den Punkten $\mathfrak{A}_1$ $\mathfrak{A}_2$ $\mathfrak{A}_3$ $\mathfrak{B}_1$ $\mathfrak{B}_2$ $\mathfrak{B}_3$ gelegt sind; wir stellen diese sechs Hyperboloide mit den auf ihnen befindlichen beiden Regelscharen folgendermaßen zusammen:

$\mathfrak{A}_1^{(2)}\begin{cases}|\mathfrak{B}_1\mathfrak{D}_1| \quad |\mathfrak{B}_2\mathfrak{D}_3| \quad |\mathfrak{B}_3\mathfrak{D}_2| & \text{der einen Regelschar}\\ t_{\mathfrak{A}_1} \quad |\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3| & \text{„ andern „}\end{cases}$

$\mathfrak{A}_2^{(2)}\begin{cases}|\mathfrak{B}_1\mathfrak{D}_2| \quad |\mathfrak{B}_2\mathfrak{D}_1| \quad |\mathfrak{B}_3\mathfrak{D}_3| & \text{der einen Regelschar}\\ t_{\mathfrak{A}_2} \quad |\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_1| & \text{„ andern „}\end{cases}$

$\mathfrak{A}_3^{(2)}\begin{cases}|\mathfrak{B}_1\mathfrak{D}_3| \quad |\mathfrak{B}_2\mathfrak{D}_2| \quad |\mathfrak{B}_3\mathfrak{D}_1| & \text{der einen Regelschar}\\ t_{\mathfrak{A}_3} \quad |\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2| & \text{„ andern „}\end{cases}$

$\mathfrak{B}_1^{(2)}\begin{cases}|\mathfrak{A}_1\mathfrak{C}_1| \quad |\mathfrak{A}_2\mathfrak{C}_3| \quad |\mathfrak{A}_3\mathfrak{C}_2| & \text{der einen Regelschar}\\ t_{\mathfrak{B}_1} \quad |\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_3| & \text{„ andern „}\end{cases}$

$\mathfrak{B}_2^{(2)}\begin{cases}|\mathfrak{A}_1\mathfrak{C}_2| \quad |\mathfrak{A}_2\mathfrak{C}_1| \quad |\mathfrak{A}_3\mathfrak{C}_3| & \text{der einen Regelschar}\\ t_{\mathfrak{B}_2} \quad |\mathfrak{B}_3\mathfrak{B}_1| & \text{„ andern „}\end{cases}$

$\mathfrak{B}_3^{(2)}\begin{cases}|\mathfrak{A}_1\mathfrak{C}_3| \quad |\mathfrak{A}_2\mathfrak{C}_2| \quad |\mathfrak{A}_3\mathfrak{C}_1| & \text{der einen Regelschar}\\ t_{\mathfrak{B}_3} \quad |\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2| & \text{„ andern „}\end{cases}$.

Weil nun das Hyperboloid $\mathfrak{A}_1^{(2)}$ durch die ganze $C_I^{(4)}$ geht, also auch den Punkt $\mathfrak{C}_1$ enthält, so müssen sich die drei Ebenen

$$[\mathfrak{C}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{D}_1] \quad [\mathfrak{C}_1\mathfrak{B}_2\mathfrak{D}_3] \quad [\mathfrak{C}_1\mathfrak{B}_3\mathfrak{D}_2]$$

in einer Geraden schneiden, welche Erzeugende der zweiten Regelschar dieses Hyperboloids ist. Da aber die Ebene $[\mathfrak{C}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{D}_1]$ nur noch einen vierten Punkt der $C_I^{(4)}$ enthält, den wir $\mathfrak{E}_1$ nennen wollen, so ist $|\mathfrak{C}_1\mathfrak{E}_1|$ diese Erzeugende. Da andererseits auch das Hyperboloid $H_1^{(2)}$ durch die ganze $C_I^{(4)}$ geht, also den Punkt $\mathfrak{D}_1$ enthält, so müssen sich die drei Ebenen

$$[\mathfrak{D}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1] \quad [\mathfrak{D}_1\mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_3] \quad [\mathfrak{D}_1\mathfrak{B}_3\mathfrak{C}_2]$$

in einer Geraden schneiden, welche Erzeugende einer Regel-

schar dieses Hyperboloids ist. Die Ebene $[\mathfrak{D}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1]$ enthält aber nur noch den vierten Punkt $\mathfrak{E}_1$ der $C_I^{(4)}$, folglich muß $|\mathfrak{D}_1\mathfrak{E}_1|$ diese Erzeugende sein. Da $\mathfrak{E}_1\mathfrak{C}_1\mathfrak{B}_2\mathfrak{D}_3$ in einer Ebene liegen, so wird $|\mathfrak{D}_3\mathfrak{E}_1|$ auch eine Erzeugende des Hyperboloids $H_2^{(2)}$ sein, welches durch $|\mathfrak{C}_1\mathfrak{B}_2|$ und die ganze Raumkurve geht (und dadurch eindeutig bestimmt ist, S. 10), folglich schneidet $|\mathfrak{D}_3\mathfrak{E}_1|$ auch $|\mathfrak{C}_2\mathfrak{B}_1|$ und $|\mathfrak{C}_3\mathfrak{B}_3|$. Ebenso wird, weil $\mathfrak{E}_1\mathfrak{C}_1\mathfrak{B}_3\mathfrak{D}_2$ in einer Ebene liegen, $|\mathfrak{D}_2\mathfrak{E}_1|$ eine Erzeugende des Hyperboloids $H_3^{(2)}$ sein, welches durch $|\mathfrak{C}_1\mathfrak{B}_3|$ und die ganze Raumkurve geht, also $|\mathfrak{C}_2\mathfrak{B}_2|$ und $|\mathfrak{C}_3\mathfrak{B}_1|$ treffen. Fahren wir in dieser Weise zu schließen fort, so erkennen wir, daß folgende je neun Ebenen:

$[\mathfrak{C}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{D}_1]$	$[\mathfrak{C}_1\mathfrak{B}_2\mathfrak{D}_3]$	$[\mathfrak{C}_1\mathfrak{B}_3\mathfrak{D}_2]$	durch einen und denselben
$[\mathfrak{C}_2\mathfrak{B}_1\mathfrak{D}_3]$	$[\mathfrak{C}_2\mathfrak{B}_2\mathfrak{D}_2]$	$[\mathfrak{C}_2\mathfrak{B}_3\mathfrak{D}_1]$	(neuen) Punkt $\mathfrak{E}_1$ der $C_I^{(4)}$
$[\mathfrak{C}_3\mathfrak{B}_1\mathfrak{D}_2]$	$[\mathfrak{C}_3\mathfrak{B}_2\mathfrak{D}_1]$	$[\mathfrak{C}_3\mathfrak{B}_3\mathfrak{D}_3]$	gehen,
$[\mathfrak{C}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{D}_3]$	$[\mathfrak{C}_1\mathfrak{B}_2\mathfrak{D}_2]$	$[\mathfrak{C}_1\mathfrak{B}_3\mathfrak{D}_1]$	durch einen und denselben
$[\mathfrak{C}_2\mathfrak{B}_1\mathfrak{D}_2]$	$[\mathfrak{C}_2\mathfrak{B}_2\mathfrak{D}_1]$	$[\mathfrak{C}_2\mathfrak{B}_3\mathfrak{D}_3]$	Punkt $\mathfrak{E}_2$ der $C_I^{(4)}$ gehen,
$[\mathfrak{C}_3\mathfrak{B}_1\mathfrak{D}_1]$	$[\mathfrak{C}_3\mathfrak{B}_2\mathfrak{D}_3]$	$[\mathfrak{C}_3\mathfrak{B}_3\mathfrak{D}_2]$	
$[\mathfrak{C}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{D}_2]$	$[\mathfrak{C}_1\mathfrak{B}_2\mathfrak{D}_1]$	$[\mathfrak{C}_1\mathfrak{B}_3\mathfrak{D}_3]$	durch einen und denselben
$[\mathfrak{C}_2\mathfrak{B}_1\mathfrak{D}_1]$	$[\mathfrak{C}_2\mathfrak{B}_2\mathfrak{D}_3]$	$[\mathfrak{C}_2\mathfrak{B}_3\mathfrak{D}_2]$	Punkt $\mathfrak{E}_3$ der $C_I^{(4)}$ gehen,
$[\mathfrak{C}_3\mathfrak{B}_1\mathfrak{D}_3]$	$[\mathfrak{C}_3\mathfrak{B}_2\mathfrak{D}_2]$	$[\mathfrak{C}_3\mathfrak{B}_3\mathfrak{D}_1]$	

$[\mathfrak{D}_1\mathfrak{A}_1\mathfrak{C}_1]$	$[\mathfrak{D}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{C}_3]$	$[\mathfrak{D}_1\mathfrak{A}_3\mathfrak{C}_2]$	durch einen und denselben
$[\mathfrak{D}_2\mathfrak{A}_1\mathfrak{C}_3]$	$[\mathfrak{D}_2\mathfrak{A}_2\mathfrak{C}_2]$	$[\mathfrak{D}_2\mathfrak{A}_3\mathfrak{C}_1]$	Punkt $\mathfrak{F}_1$ der $C_I^{(4)}$ gehen,
$[\mathfrak{D}_3\mathfrak{A}_1\mathfrak{C}_2]$	$[\mathfrak{D}_3\mathfrak{A}_2\mathfrak{C}_1]$	$[\mathfrak{D}_3\mathfrak{A}_3\mathfrak{C}_3]$	
$[\mathfrak{D}_1\mathfrak{A}_1\mathfrak{C}_3]$	$[\mathfrak{D}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{C}_2]$	$[\mathfrak{D}_1\mathfrak{A}_3\mathfrak{C}_1]$	durch einen und denselben
$[\mathfrak{D}_2\mathfrak{A}_1\mathfrak{C}_2]$	$[\mathfrak{D}_2\mathfrak{A}_2\mathfrak{C}_1]$	$[\mathfrak{D}_2\mathfrak{A}_3\mathfrak{C}_3]$	Punkt $\mathfrak{F}_2$ der $C_I^{(4)}$ gehen,
$[\mathfrak{D}_3\mathfrak{A}_1\mathfrak{C}_1]$	$[\mathfrak{D}_3\mathfrak{A}_2\mathfrak{C}_3]$	$[\mathfrak{D}_3\mathfrak{A}_3\mathfrak{C}_2]$	
$[\mathfrak{D}_1\mathfrak{A}_1\mathfrak{C}_2]$	$[\mathfrak{D}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{C}_1]$	$[\mathfrak{D}_1\mathfrak{A}_3\mathfrak{C}_3]$	durch einen und denselben
$[\mathfrak{D}_2\mathfrak{A}_1\mathfrak{C}_1]$	$[\mathfrak{D}_2\mathfrak{A}_2\mathfrak{C}_3]$	$[\mathfrak{D}_2\mathfrak{A}_3\mathfrak{C}_2]$	Punkt $\mathfrak{F}_3$ der $C_I^{(4)}$ gehen.
$[\mathfrak{D}_3\mathfrak{A}_1\mathfrak{C}_3]$	$[\mathfrak{D}_3\mathfrak{A}_2\mathfrak{C}_2]$	$[\mathfrak{D}_3\mathfrak{A}_3\mathfrak{C}_1]$	

Blicken wir jetzt auf die gewonnenen Resultate zurück, so erkennen wir, daß sich zuerst aus den beiden ursprünglich gegebenen Punktetripeln $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3$ und $\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_3$ zwei neue Punktetripel der $C_I^{(4)}$ ergaben: $\mathfrak{C}_1\mathfrak{C}_2\mathfrak{C}_3$ und $\mathfrak{D}_1\mathfrak{D}_2\mathfrak{D}_3$ (S. 19).

Die 27 Ebenen, welche je drei Punkte aus den Tripeln $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3$, $\mathfrak{C}_1\mathfrak{C}_2\mathfrak{C}_3$ und $\mathfrak{D}_1\mathfrak{D}_2\mathfrak{D}_3$ mit einander verbinden, schnitten sich zu je neun in drei neuen Punkten $\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2\mathfrak{F}_3$ der Raumkurve, und endlich schnitten sich auch die 27 Ebenen, welche je drei Punkte aus den Tripeln $\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_3$, $\mathfrak{C}_1\mathfrak{C}_2\mathfrak{C}_3$ und $\mathfrak{D}_1\mathfrak{D}_2\mathfrak{D}_3$ mit einander verbinden, zu je neun in drei neuen Punkten $\mathfrak{E}_1\mathfrak{E}_2\mathfrak{E}_3$ der Raumkurve.

Die Geraden

$$|\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1| \quad |\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_3| \quad |\mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_2| \quad |\mathfrak{D}_1\mathfrak{E}_1| \quad |\mathfrak{D}_2\mathfrak{E}_3| \quad |\mathfrak{D}_3\mathfrak{E}_2|$$
$$|\mathfrak{C}_1\mathfrak{F}_1| \quad |\mathfrak{C}_2\mathfrak{F}_3| \quad |\mathfrak{C}_3\mathfrak{F}_2|$$

gehören der einen Regelschar, die Geraden

$$|\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1| \quad |\mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_3| \quad |\mathfrak{B}_3\mathfrak{C}_2| \quad |\mathfrak{A}_1\mathfrak{D}_1| \quad |\mathfrak{A}_2\mathfrak{D}_3| \quad |\mathfrak{A}_3\mathfrak{D}_2|$$

der andern Regelschar eines und desselben Hyperboloids $H_1^{(2)}$ an; die Geraden

$$|\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_3| \quad |\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2| \quad |\mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_1| \quad |\mathfrak{D}_1\mathfrak{E}_3| \quad |\mathfrak{D}_2\mathfrak{E}_2| \quad |\mathfrak{D}_3\mathfrak{E}_1|$$
$$|\mathfrak{C}_1\mathfrak{F}_3| \quad |\mathfrak{C}_2\mathfrak{F}_2| \quad |\mathfrak{C}_3\mathfrak{F}_1|$$

gehören der einen Regelschar, die Geraden

$$|\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_2| \quad |\mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_1| \quad |\mathfrak{B}_3\mathfrak{C}_3| \quad |\mathfrak{A}_1\mathfrak{D}_2| \quad |\mathfrak{A}_2\mathfrak{D}_1| \quad |\mathfrak{A}_3\mathfrak{D}_3|$$

der andern Regelschar eines und desselben Hyperboloids $H_2^{(2)}$ an, und die Geraden

$$|\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_2| \quad |\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_1| \quad |\mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_3| \quad |\mathfrak{D}_1\mathfrak{E}_2| \quad |\mathfrak{D}_2\mathfrak{E}_1| \quad |\mathfrak{D}_3\mathfrak{E}_3|$$
$$|\mathfrak{C}_1\mathfrak{F}_2| \quad |\mathfrak{C}_2\mathfrak{F}_1| \quad |\mathfrak{C}_3\mathfrak{F}_3|$$

gehören der einen Regelschar, die Geraden

$$|\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_3| \quad |\mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_2| \quad |\mathfrak{B}_3\mathfrak{C}_1| \quad |\mathfrak{A}_1\mathfrak{D}_3| \quad |\mathfrak{A}_2\mathfrak{D}_2| \quad |\mathfrak{A}_3\mathfrak{D}_1|$$

der andern Regelschar eines und desselben Hyperboloids $H_3^{(2)}$ an, und die drei Hyperboloide $H_1^{(2)}$ $H_2^{(2)}$ $H_3^{(2)}$ schneiden sich in derselben Raumkurve $C_I^{(4)}$.

Da jedes dieser drei Hyperboloide durch drei Erzeugende aus der einen oder andern ihrer beiden Regelscharen bestimmt ist, und die Raumkurve schon durch die drei Punktepaare, in welchen sie den drei Erzeugenden derselben Regelschar begegnet, bestimmt wird, so folgt der Satz:

Durch denselben Prozeß, vermittelst dessen wir

von den beiden gegebenen Punktetripeln $\begin{cases}\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3\\ \mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_3\end{cases}$ zu den neuen Punkten $\mathfrak{C}_1\mathfrak{C}_2\mathfrak{C}_3$ und $\mathfrak{D}_1\mathfrak{D}_2\mathfrak{D}_3$ der $C^{(4)}$ gelangten (S. 19), kann man vermittelst der Punktetripel $\begin{cases}\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3\\ \mathfrak{D}_1\mathfrak{D}_2\mathfrak{D}_3\end{cases}$ und $\begin{cases}\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_3\\ \mathfrak{C}_1\mathfrak{C}_2\mathfrak{C}_3\end{cases}$ wieder zu neuen Punkten der $C_I^{(4)}$ gelangen und so fortfahrend in unbegrenzter Anzahl auf lineare Weise immer neue Punkte der $C_I^{(4)}$ konstruieren.

Wir haben ferner sechs andere Hyperboloide $\mathfrak{A}_1^{(2)}\ \mathfrak{A}_2^{(2)}\ \mathfrak{A}_3^{(2)}\ \mathfrak{B}_1^{(2)}\ \mathfrak{B}_2^{(2)}\ \mathfrak{B}_3^{(2)}$, welche auch durch die ganze Raumkurve gehen, und deren beide Regelscharen folgende sind:

$$\mathfrak{A}_1^{(2)}\begin{cases} \qquad |\mathfrak{B}_1\mathfrak{D}_1| \quad |\mathfrak{B}_2\mathfrak{D}_3| \quad |\mathfrak{B}_3\mathfrak{D}_2| \\ t_{\mathfrak{A}_1}\equiv|\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_1| \quad |\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3| \quad |\mathfrak{C}_1\mathfrak{E}_1| \quad |\mathfrak{C}_2\mathfrak{E}_3| \quad |\mathfrak{C}_3\mathfrak{E}_2|,\end{cases}$$

$$\mathfrak{A}_2^{(2)}\begin{cases} \qquad |\mathfrak{B}_1\mathfrak{D}_2| \quad |\mathfrak{B}_2\mathfrak{D}_1| \quad |\mathfrak{B}_3\mathfrak{D}_3| \\ t_{\mathfrak{A}_2}\equiv|\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_2| \quad |\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_1| \quad |\mathfrak{C}_1\mathfrak{E}_3| \quad |\mathfrak{C}_2\mathfrak{E}_2| \quad |\mathfrak{C}_3\mathfrak{E}_1|,\end{cases}$$

$$\mathfrak{A}_3^{(2)}\begin{cases} \qquad |\mathfrak{B}_1\mathfrak{D}_3| \quad |\mathfrak{B}_2\mathfrak{D}_2| \quad |\mathfrak{B}_3\mathfrak{D}_1| \\ t_{\mathfrak{A}_3}\equiv|\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_3| \quad |\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2| \quad |\mathfrak{C}_1\mathfrak{E}_2| \quad |\mathfrak{C}_2\mathfrak{E}_1| \quad |\mathfrak{C}_3\mathfrak{E}_3|;\end{cases}$$

$$\mathfrak{B}_1^{(2)}\begin{cases} \qquad |\mathfrak{A}_1\mathfrak{C}_1| \quad |\mathfrak{A}_2\mathfrak{C}_3| \quad |\mathfrak{A}_3\mathfrak{C}_2| \\ t_{\mathfrak{B}_1}\equiv|\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_1| \quad |\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_3| \quad |\mathfrak{D}_1\mathfrak{F}_1| \quad |\mathfrak{D}_2\mathfrak{F}_3| \quad |\mathfrak{D}_3\mathfrak{F}_2|,\end{cases}$$

$$\mathfrak{B}_2^{(2)}\begin{cases} \qquad |\mathfrak{A}_1\mathfrak{C}_2| \quad |\mathfrak{A}_2\mathfrak{C}_1| \quad |\mathfrak{A}_3\mathfrak{C}_3| \\ t_{\mathfrak{B}_2}\equiv|\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_2| \quad |\mathfrak{B}_3\mathfrak{B}_1| \quad |\mathfrak{D}_1\mathfrak{F}_3| \quad |\mathfrak{D}_2\mathfrak{F}_2| \quad |\mathfrak{D}_3\mathfrak{F}_1|,\end{cases}$$

$$\mathfrak{B}_3^{(2)}\begin{cases} \qquad |\mathfrak{A}_1\mathfrak{C}_3| \quad |\mathfrak{A}_2\mathfrak{C}_2| \quad |\mathfrak{A}_3\mathfrak{C}_1| \\ t_{\mathfrak{B}_3}\equiv|\mathfrak{B}_3\mathfrak{B}_3| \quad |\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2| \quad |\mathfrak{D}_1\mathfrak{F}_2| \quad |\mathfrak{D}_2\mathfrak{F}_1| \quad |\mathfrak{D}_3\mathfrak{F}_3|.\end{cases}$$

Da die Punkte $\mathfrak{E}_1\mathfrak{E}_2\mathfrak{E}_3\ \mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2\mathfrak{F}_3$ gleichzeitig auf allen neun Hyperboloiden durch die $C_I^{(4)}$ liegen, so sind es neue Punktetripel der Raumkurve und werden linear konstruiert, wie es oben geschehen ist (S. 22). Wir können nun von diesen neuen Punkten der $C_I^{(4)}$ in gleicher Weise zu weiteren Punkten derselben fortschreiten oder in der früheren Weise aus ihnen neue ableiten (§ 5) und haben ein fortgesetztes Verfahren, um in linearer Weise unzählig viele Punkte der Raumkurve (allerdings diskret liegend) aufzufinden.

§ 5. Charakteristische Eigenschaft eines Punktetripels der $C_I^{(4)}$.

Auf dem durch die Raumkurve gelegten Hyperboloid $H_1^{(2)}$ gehen von $\mathfrak{A}_1$ die Erzeugenden $|\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1|$ und $|\mathfrak{A}_1\mathfrak{D}_1|$ der beiden Regelscharen aus, folglich enthält die Ebene $[\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{D}_1]$ die Tangente $t_{\mathfrak{A}_1}$ der Raumkurve im Punkte $\mathfrak{A}_1$ (S. 14); ferner gehen von $\mathfrak{B}_1$ die Erzeugende $|\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1|$ und von $\mathfrak{D}_1$ die Erzeugende $|\mathfrak{D}_1\mathfrak{E}_1|$ verschiedener Regelscharen aus; folglich muß die Ebene $[\mathfrak{A}_1\mathfrak{C}_1\mathfrak{E}_1]$ den zu $\mathfrak{A}_1$ gehörenden Schmiegungsstrahl a_1 enthalten (S. 15). Das durch $|\mathfrak{C}_1\mathfrak{E}_1|$ und die Raumkurve gelegte Hyperboloid $\mathfrak{A}_1^{(2)}$ muß daher diesen Schmiegungsstrahl enthalten. Nehmen wir statt des Hyperboloids $H_1^{(2)}$ jedes der beiden übrigen Hyperboloide $H_2^{(2)}$ und $H_3^{(2)}$, so finden wir den Schmiegungsstrahl a_1 als die Schnittlinie je dreier Ebenen und ebenso die Schmiegungsstrahlen a_2 a_3 b_1 b_2 b_3:

$$\begin{cases} a_1 = |[\mathfrak{A}_1\mathfrak{C}_1\mathfrak{E}_1] \quad [\mathfrak{A}_1\mathfrak{C}_2\mathfrak{E}_3] \quad [\mathfrak{A}_1\mathfrak{C}_3\mathfrak{E}_2]| \\ a_2 = |[\mathfrak{A}_2\mathfrak{C}_1\mathfrak{E}_3] \quad [\mathfrak{A}_2\mathfrak{C}_2\mathfrak{E}_2] \quad [\mathfrak{A}_2\mathfrak{C}_3\mathfrak{E}_1]| \\ a_3 = |[\mathfrak{A}_3\mathfrak{C}_1\mathfrak{E}_2] \quad [\mathfrak{A}_3\mathfrak{C}_2\mathfrak{E}_1] \quad [\mathfrak{A}_3\mathfrak{C}_3\mathfrak{E}_3]| \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_1 = |[\mathfrak{B}_1\mathfrak{D}_1\mathfrak{F}_1] \quad [\mathfrak{B}_1\mathfrak{D}_2\mathfrak{F}_3] \quad [\mathfrak{B}_1\mathfrak{D}_3\mathfrak{F}_2]| \\ b_2 = |[\mathfrak{B}_2\mathfrak{D}_1\mathfrak{F}_3] \quad [\mathfrak{B}_2\mathfrak{D}_2\mathfrak{F}_2] \quad [\mathfrak{B}_2\mathfrak{D}_3\mathfrak{F}_1]| \\ b_3 = |[\mathfrak{B}_3\mathfrak{D}_1\mathfrak{F}_2] \quad [\mathfrak{B}_3\mathfrak{D}_2\mathfrak{F}_1] \quad [\mathfrak{B}_3\mathfrak{D}_3\mathfrak{F}_3]| . \end{cases}$$

Da nun der Schmiegungsstrahl a_1 auf dem Hyperboloid $\mathfrak{A}_1^{(2)}$ eine Erzeugende der einen Regelschar, $|\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3|$ aber eine Erzeugende der andern Regelschar ist, so müssen sich a_1 und $|\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3|$ begegnen, also muß der zu $\mathfrak{A}_1$ gehörige Schmiegungspunkt in der Ebene $[\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3]$ liegen; ebenso muß auch der zu $\mathfrak{A}_2$ und zu $\mathfrak{A}_3$ gehörige Schmiegungspunkt in dieser Ebene liegen; dieselbe hat aber nur noch einen einzigen vierten Punkt $\mathfrak{A}$ mit der Raumkurve gemein; wir schließen also:

Ein Punktetripel $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3$ der Raumkurve $C_I^{(4)}$ hat die charakteristische Eigenschaft, daß die drei Schmiegungsebenen derselben sich in einem und demselben vierten Punkte der Raumkurve begegnen, in welchem die Ebene $[\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3]$ sie schneidet.

Da für das Punktetripel $\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_3$ unmittelbar dieselbe Eigenschaft einleuchtet, so schließen wir:

Wenn man durch eine $C_I^{(4)}$ ein Hyperboloid legt und von einem Punktetripel $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3$ derselben auf drei Erzeugenden einer und derselben Regelschar des Hyperboloids $|\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1|$ $|\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_3|$ $|\mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_2|$ zu drei neuen Punkten $\mathfrak{B}_1$ $\mathfrak{B}_3$ $\mathfrak{B}_2$ der $C_I^{(4)}$ gelangt, so bilden auch diese ein Punktetripel der $C_I^{(4)}$, d. h. besitzen die vorige charakteristische Eigenschaft.

Hieraus folgt nun, daß auch $\mathfrak{C}_1\mathfrak{C}_2\mathfrak{C}_3$, $\mathfrak{D}_1\mathfrak{D}_2\mathfrak{D}_3$, $\mathfrak{E}_1\mathfrak{E}_2\mathfrak{E}_3$ und $\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2\mathfrak{F}_3$ Punktetripel der $C_I^{(4)}$ sein müssen, d. h. dieselbe charakteristische Eigenschaft besitzen. Man findet die Schmiegungspunkte $\mathfrak{A}$ $\mathfrak{B}$ zu den Tripeln $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3$ und $\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_3$ selbst als die gemeinschaftlichen Schnittpunkte je dreier Schmiegungsstrahlen

$$\mathfrak{A} = (a_1 a_2 a_3), \qquad \mathfrak{B} = (b_1 b_2 b_3)$$

und daraus die Schmiegungsebenen

$$\begin{array}{ll} \tau_{\mathfrak{A}_1} = [t_{\mathfrak{A}_1}\mathfrak{A}] & \tau_{\mathfrak{B}_1} = [t_{\mathfrak{B}_1}\mathfrak{B}] \\ \tau_{\mathfrak{A}_2} = [t_{\mathfrak{A}_2}\mathfrak{A}] & \tau_{\mathfrak{B}_2} = [t_{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{B}] \\ \tau_{\mathfrak{A}_3} = [t_{\mathfrak{A}_3}\mathfrak{A}] & \tau_{\mathfrak{B}_3} = [t_{\mathfrak{B}_3}\mathfrak{B}]. \end{array}$$

Da die Punkte $\mathfrak{C}_1$ $\mathfrak{C}_2$ $\mathfrak{C}_3$ als die vierten Schnittpunkte der drei Ebenen mit der Raumkurve auftreten, welche man erhält, wenn man den Punkt $\mathfrak{A}_1$ mit den drei Seiten $|\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_3|$ $|\mathfrak{B}_3\mathfrak{B}_1|$ $|\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2|$ eines Punktetripels $\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_3$ durch drei Ebenen verbindet, so schließen wir:

Wenn man mit einem Punkte der $C_I^{(4)}$ die drei Seiten eines Punktetripels durch drei Ebenen verbindet, so schneiden dieselben die $C_I^{(4)}$ zum viertenmal in drei Punkten eines neuen Punktetripels.

Ebenso lesen wir aus den auf S. 20 konstruierten Tangenten $t_{\mathfrak{A}_1}$ $t_{\mathfrak{A}_2}$ $t_{\mathfrak{A}_3}$ den Satz ab:

Wenn man die drei Tangenten der $C_I^{(4)}$ in den Punkten eines Tripels mit einem andern Punkte der Raumkurve durch drei Ebenen verbindet und die vierten Schnittpunkte derselben mit der $C_I^{(4)}$ be-

bestimmt, so bilden dieselben ein neues Punktetripel der Raumkurve.

Nimmt man zum Projektionspunkt, von welchem die Seiten eines Punktetripels (oder die Tangenten in den Punkten eines Tripels) auf die Raumkurve projiciert werden, der Reihe nach die drei Punkte eines zweiten Tripels, so erhält man alle drei Mal dasselbe dritte Punktetripel, nur in cyklischer Reihenfolge.

Daraus, daß die Sekante $|\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1|$ der $C_I^{(4)}$ mit den drei Punkten $\mathfrak{D}_1\mathfrak{D}_2\mathfrak{D}_3$ eines Tripels verbunden drei Ebenen liefert, welche der $C_I^{(4)}$ zum viertenmal in drei Punkten $\mathfrak{E}_1\mathfrak{E}_3\mathfrak{E}_2$ eines neuen Tripels begegnen, schließen wir:

Wenn man eine Sekante der $C_I^{(4)}$ mit den drei Punkten eines Tripels durch drei Ebenen verbindet, welche der $C_I^{(4)}$ in drei neuen Punkten begegnen, so bilden diese ein zweites Tripel der Raumkurve.

An Stelle der Sekante kann man natürlich auch eine beliebige Tangente der Raumkurve nehmen. Ist ein Punktetripel der Raumkurve $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3$ einmal ermittelt, so kann man, um ein zweites $\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_3$ derselben zu finden, einen Punkt $\mathfrak{B}_1$ auf der $C_I^{(4)}$ willkürlich wählen, die beiden übrigen Punkte $\mathfrak{B}_2$ und $\mathfrak{B}_3$ sind dann vollständig und eindeutig bestimmt und werden erhalten, indem man $|\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1|$ zieht (oder $|\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_1|$ oder $|\mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_1|$), durch diese Sekante $|\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1|$ und die $C_I^{(4)}$ das einzige Hyperboloid legt und auf demselben die beiden durch $\mathfrak{A}_2$ und $\mathfrak{A}_3$ gehenden Erzeugenden derselben Regelschar des Hyperboloids, welcher $|\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1|$ angehört, nimmt; diese werden dann der $C^{(4)}$ in den beiden übrigen Punkten des Tripels begegnen.

Um nun auf einer gegebenen $C_I^{(4)}$ ein Punktetripel $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3$ zu ermitteln, nennen wir den vierten Schnittpunkt $\mathfrak{A}$ der Ebene $[\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3]$, in welchem sich die drei Schmiegungsebenen der $C_I^{(4)}$ in diesen drei Punkten schneiden, „den begleitenden Punkt“ der Ebene des Tripels $[\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3]$. Projicieren wir von $\mathfrak{A}$ aus die $C_I^{(4)}$ durch einen Kegel $\mathfrak{A}^{(3)}$ (Seite 11) und durchschneiden den Kegel $\mathfrak{A}^{(3)}$ mit einer beliebigen Transversalebene, so erhalten wir in derselben eine allgemeine ebene Kurve dritter Ordnung $\mathfrak{K}^{(3)}$; diese hat bekanntlich im all-

gemeinen neun Wendepunkte, von der aber nur drei in einer Geraden s liegende Wendepunkte $\mathfrak{w}_1\, \mathfrak{w}_2\, \mathfrak{w}_3$ reell sind.*

Die drei Wendetangenten in $\mathfrak{w}_1\, \mathfrak{w}_2\, \mathfrak{w}_3$ geben mit $\mathfrak{A}$ verbunden drei Ebenen, deren jede der $C_I^{(4)}$ in drei zusammenfallenden Punkten außer in $\mathfrak{A}$ begegnen muß; diese drei Punkte $\mathfrak{A}_1\, \mathfrak{A}_2\, \mathfrak{A}_3$ haben also zu Schmiegungsebenen die drei Ebenen $[\mathfrak{A} t_{\mathfrak{w}_1}]\ [\mathfrak{A} t_{\mathfrak{w}_2}]\ [\mathfrak{A} t_{\mathfrak{w}_3}]$, und da $\mathfrak{w}_1\, \mathfrak{w}_2\, \mathfrak{w}_3$ in einer Geraden s liegen, so wird die Ebene $[\mathfrak{A} s]$ der $C_I^{(4)}$ in den drei Punkten $\mathfrak{A}_1\, \mathfrak{A}_2\, \mathfrak{A}_3$ begegnen, die ein Punktetripel der Raumkurve bilden, für welches $\mathfrak{A}$ der begleitende Punkt ist.

Wir haben also ein reelles Punktetripel auf der gegebenen $C_I^{(4)}$ gefunden und können aus demselben in der oben angegebenen Weise unzählig viele andere Punktetripel ableiten. Zu einem beliebigen Punkte $\mathfrak{A}$ der $C_I^{(4)}$ als begleitendem Punkte giebt es nur ein einziges reelles und völlig bestimmtes Punktetripel $\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 \mathfrak{A}_3$ von solcher Beschaffenheit, daß die drei Schmiegungsebenen $\tau_{\mathfrak{A}_1}\, \tau_{\mathfrak{A}_2}\, \tau_{\mathfrak{A}_3}$ sich in $\mathfrak{A}$, dem vierten Schnittpunkte der Ebene $[\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 \mathfrak{A}_3]$ mit der $C_I^{(4)}$ begegnen.

Aber auch umgekehrt giebt es zu einem willkürlich auf $C_I^{(4)}$ gewählten Punkte $\mathfrak{A}_1$ nur zwei bestimmte übrige Punkte $\mathfrak{A}_2\, \mathfrak{A}_3$, die mit $\mathfrak{A}_1$ ein reelles Punktetripel der $C_I^{(4)}$ bilden; denn man braucht nur die Schmiegungsebene im Punkte $\mathfrak{A}_1$ an der $C_I^{(4)}$ zu legen, welche zum viertenmale der Raumkurve in $\mathfrak{A}$ begegnet und durch $|\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}|$ die einzige reelle Ebene zu legen, welche noch zwei reelle Wendestrahlen des Kegels $\mathfrak{A}^{(3)}$ enthält; diese schneidet $C_I^{(4)}$ in $\mathfrak{A}_2$ und $\mathfrak{A}_3$, den beiden übrigen Punkten des gesuchten Tripels $\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 \mathfrak{A}_3$. (Es giebt allerdings, wie aus der Theorie der ebenen Kurven dritter Ordnung folgt, durch den Schmiegungsstrahl $|\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}|$ im allgemeinen vier Ebenen der verlangten Art, von denen aber nur zwei reell, die beiden anderen konjugiert-imaginär sind; von den beiden reellen Ebenen begegnet auch nur eine der $C_I^{(4)}$ in zwei reellen, die andere in zwei konjugiert-imaginären Punkten, sodaß es also in der That zu dem willkürlich gewählten Punkte $\mathfrak{A}_1$ nur zwei reelle Punkte $\mathfrak{A}_2\, \mathfrak{A}_3$ giebt, die

* H. Schroeter, Die Theorie der ebenen Kurven dritter Ordnung, S. 235.



das Tripel $\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 \mathfrak{A}_3$ der $C_I^{(4)}$ bilden.) Wir können also den Satz aussprechen:

Es giebt auf der $C_I^{(4)}$ nur ein System reeller Punktetripel, und jeder Punkt der $C_I^{(4)}$ kann als Eckpunkt eines solchen Tripels gewählt werden; die beiden übrigen sind dann vollständig bestimmt.

Hat man ein reelles Punktetripel $\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 \mathfrak{A}_3$ auf der gegebenen $C_I^{(4)}$ ermittelt, so kann man das ganze System der übrigen aus demselben in zwiefacher Weise ableiten. Soll $\mathfrak{B}_1$ ein Eckpunkt eines zweiten Tripels der $C_I^{(4)}$ sein, so lege man die Ebene $[\mathfrak{B}_1 \mathfrak{A}_2 \mathfrak{A}_3]$ und bestimme den vierten Schnittpunkt $\mathfrak{P}$ derselben mit der $C_I^{(4)}$, dann werden die beiden Ebenen $[\mathfrak{P} \mathfrak{A}_3 \mathfrak{A}_1]$ $[\mathfrak{P} \mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2]$ der Raumkurve zum viertenmal in den beiden übrigen Punkten $\mathfrak{B}_2 \mathfrak{B}_3$ des gesuchten Punktetripels begegnen (S. 26). Oder man ziehe die Gerade $|\mathfrak{B}_1 \mathfrak{A}_1|$ und lege durch dieselbe eine beliebige Ebene, welche der $C_I^{(4)}$ in den beiden übrigen Punkten $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ begegne, deren Verbindungslinie $s = |\mathfrak{P} \mathfrak{Q}|$ man aufsuche; dann werden die beiden Ebenen $[s \mathfrak{A}_2]$ $[s \mathfrak{A}_3]$ der Raumkurve zum viertenmal in den beiden übrigen Punkten $\mathfrak{B}_3$ und $\mathfrak{B}_2$ des gesuchten Punktetripels begegnen (S. 27).

Wenn wir den gemeinsamen Schmiegungspunkt $\mathfrak{A}$ der drei Schmiegungsebenen

$$\tau_{\mathfrak{A}_1} = [t_{\mathfrak{A}_1} \mathfrak{A}] \quad \tau_{\mathfrak{A}_2} = [t_{\mathfrak{A}_2} \mathfrak{A}] \quad \tau_{\mathfrak{A}_3} = [t_{\mathfrak{A}_3} \mathfrak{A}]$$

als Eckpunkt eines neuen Punktetripels der $C_I^{(4)}$ auffassen, so können wir die beiden übrigen Punkte dieses Tripels $\mathfrak{A}' \mathfrak{A}''$ ermitteln, indem wir durch $|\mathfrak{A} \mathfrak{A}_1|$ die besondere Ebene legen, welche mit $\tau_{\mathfrak{A}_1}$ zusammenfällt, dann ist die übrige Sekante $|\mathfrak{P} \mathfrak{Q}|$ nichts anderes als $t_{\mathfrak{A}_1}$, folglich müssen

$$[t_{\mathfrak{A}_1} \mathfrak{A}_2] \quad \text{und} \quad [t_{\mathfrak{A}_1} \mathfrak{A}_3]$$

in den gesuchten Punkten

$$\mathfrak{A}' \quad \text{und} \quad \mathfrak{A}''$$

der $C_I^{(4)}$ zum viertenmal begegnen. Wir können aber auch $|\mathfrak{A} \mathfrak{A}_2|$ nehmen und durch diese Gerade die Schmiegungsebene $\tau_{\mathfrak{A}_2}$ legen, dann ist die übrige Sekante $|\mathfrak{P} \mathfrak{Q}|$ nichts anderes als $t_{\mathfrak{A}_2}$, also müssen auch die Ebenen

$$[t_{\mathfrak{A}_2}\mathfrak{A}_3] \quad \text{und} \quad [t_{\mathfrak{A}_2}\mathfrak{A}_1]$$

in den beiden gesuchten Punkten der $C_I^{(4)}$ zum viertenmal begegnen; die Ebene $[t_{\mathfrak{A}_2}\mathfrak{A}_1]$ kann aber nicht durch $\mathfrak{A}'$ gehen, denn sonst müßten sich die beiden Tangenten $t_{\mathfrak{A}_1}$ und $t_{\mathfrak{A}_2}$ begegnen, und ihre Verbindungsebene würde noch den fünften Punkt $\mathfrak{A}'$ enthalten, was widersinnig ist, folglich muß die Ebene $[t_{\mathfrak{A}_2}\mathfrak{A}_3]$ durch $\mathfrak{A}'$ und $[t_{\mathfrak{A}_2}\mathfrak{A}_1]$ durch $\mathfrak{A}''$ gehen; endlich sehen wir in gleicher Weise ein, daß auch die Ebenen

$$[t_{\mathfrak{A}_3}\mathfrak{A}_1] \quad \text{und} \quad [t_{\mathfrak{A}_3}\mathfrak{A}_2] \qquad \text{bez.}$$

die Punkte $\qquad \mathfrak{A}' \quad$ und $\quad \mathfrak{A}''$

enthalten müssen; folglich schneiden sich die je drei Ebenen

$$([t_{\mathfrak{A}_1}\mathfrak{A}_2] \quad [t_{\mathfrak{A}_2}\mathfrak{A}_3] \quad [t_{\mathfrak{A}_3}\mathfrak{A}_1]) = \mathfrak{A}',$$
$$([t_{\mathfrak{A}_1}\mathfrak{A}_3] \quad [t_{\mathfrak{A}_2}\mathfrak{A}_1] \quad [t_{\mathfrak{A}_3}\mathfrak{A}_2]) = \mathfrak{A}''$$

in den Punkten $\mathfrak{A}'\,\mathfrak{A}''$ der $C^{(4)}$, welche mit $\mathfrak{A}$ ein Punktetripel der Raumkurve bilden.

Wir machen schließlich noch auf die Analogie aufmerksam, welche zwischen diesen Eigenschaften der Punktetripel einer $C_I^{(4)}$ und den bekannten Beziehungen der konjugierten Punktepaare einer ebenen Kurve dritter Ordnung $\mathfrak{K}^{(3)}$ obwaltet. Für die $\mathfrak{K}^{(3)}$ heißen zwei Punkte, die denselben Tangentialpunkt haben, d. h. deren Tangenten sich in einem und demselben dritten Punkte der $\mathfrak{K}^{(3)}$ begegnen, ein Paar konjugierter Punkte der Kurve, und man leitet durch Projektion aus einem Paare weitere ab. Für die $C_I^{(4)}$ heißen drei Punkte, die denselben Schmiegungspunkt haben, d. h. deren drei Schmiegungsebenen sich in einem und demselben vierten Punkte der $C_I^{(4)}$ begegnen, der noch dazu in der Ebene der ersten drei Punkte selbst liegt, ein Punktetripel der Raumkurve, und wir haben aus einem solchen Punktetripel durch Projektion das ganze System derselben abgeleitet in mehrfacher Weise. Bei der $\mathfrak{K}^{(3)}$ bestimmen drei von einander unabhängige Paare konjugierter Punkte die ganze $\mathfrak{K}^{(3)}$; die $C_I^{(4)}$ wird aber schon vollständig und eindeutig bestimmt durch zwei ihrer Punktetripel (Seite 18).

In der That vertritt ein Punktetripel vier einfache Bestimmungsstücke für die $C_I^{(4)}$, indem zu den drei Punkten

desselben noch die zwischen ihnen obwaltende Bedingung hinzutritt. Denn zwei Punktetripel vertreten die zur Bestimmung der $C_I^{(4)}$ erforderlichen acht einfachen Bedingungen (Seite 4). Wenn wir zur Bestimmung der $C_I^{(4)}$ ein Punktetripel $\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 \mathfrak{A}_3$ und noch vier willkürlich im Raume angenommene Punkte

$$1\ 2\ 3\ 4$$

geben, so kann die $C_I^{(4)}$ auf folgende Weise konstruiert werden:

Da das Punktetripel $\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 \mathfrak{A}_3$ der $C_I^{(4)}$ die Eigenschaft hat, daß das Hyperboloid, welches durch die Sekante $|\mathfrak{A}_2 \mathfrak{A}_3|$ und die Raumkurve gelegt wird, gleichzeitig die Tangente $t_{\mathfrak{A}_1}$ der $C_I^{(4)}$ im Punkte $\mathfrak{A}_1$ als Erzeugende derselben Regelschar besitzt, zu der $|\mathfrak{A}_2 \mathfrak{A}_3|$ gehört (S. 24), und da $|\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}|$, wo $\mathfrak{A}$ den zu $\mathfrak{A}_1$ gehörenden Schmiegungspunkt bezeichnet, der andern Regelschar dieses Hyperboloids angehört (S. 25), so wird in zwei projektiven Ebenenbüscheln, die zu Axen $|\mathfrak{A}_2 \mathfrak{A}_3|$ und $t_{\mathfrak{A}_1}$ haben, und deren entsprechende Ebenen sich in den Punkten der $C_I^{(4)}$ begegnen, der Ebene $[\mathfrak{A}_2 \mathfrak{A}_3 \mathfrak{A}_1]$ des einen Ebenenbüschels die Ebene $[t_{\mathfrak{A}_1} \mathfrak{A}]$ des andern entsprechen. Wir bilden also das Büschel der vier Ebenen

$$|\mathfrak{A}_2 \mathfrak{A}_3|(1\ 2\ 3\ 4),$$

ziehen durch $\mathfrak{A}_1$ die vier Strahlen

$$\mathfrak{A}_1(1\ 2\ 3\ 4)$$

und suchen einen solchen Strahl durch $\mathfrak{A}_1$, der die Eigenschaft besitzt, daß die vier durch ihn und die Punkte 1 2 3 4 gelegten Ebenen dasselbe Doppelverhältnis haben, wie die Ebenen des Büschels $|\mathfrak{A}_2 \mathfrak{A}_3|(1234)$. Der Ort dieses gesuchten durch $\mathfrak{A}_1$ gehenden Strahles ist ein bestimmter Kegel $\mathfrak{A}_1^{(2)}$ zweiter Ordnung, welcher durch die vier Strahlen

$$|\mathfrak{A}_1 1| \quad |\mathfrak{A}_1 2| \quad |\mathfrak{A}_1 3| \quad |\mathfrak{A}_1 4|$$

hindurchgeht und das gegebene Doppelverhältnis faßt. Seine Konstruktion liefert das bekannte Chasles'sche Problem der Projektivität, dessen Lösung auf S. 5 ff. angegeben ist. Auf diesem Kegel $\mathfrak{A}_1^{(2)}$ giebt es nur einen einzigen bestimmten und leicht konstruierbaren Kegelstrahl x_1 von solcher Beschaffenheit, daß für jeden beliebigen andern Kegelstrahl x die Pro-

jektivität erfüllt wird $x(x_1 1234) \barwedge |\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3|(\mathfrak{A}_1 1234)$. Man braucht nur einen beliebigen Kegelstrahl x des vorigen Kegels $\mathfrak{A}_1^{(2)}$ zu nehmen und diejenige Ebene durch x zu legen, welche in dem Ebenenbüschel $x(1234)$ entsprechend ist der Ebene $[\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_1]$ in dem Ebenenbüschel $|\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3|(1234)$. Diese Ebene wird den Kegel $\mathfrak{A}_1^{(2)}$ in dem gesuchten Kegelstrahle x_1 zum zweitenmal schneiden.

Dann ist

$$x_1 \equiv t_{\mathfrak{A}_1}$$

die Tangente der gesuchten $C_I^{(4)}$ in dem Punkte $\mathfrak{A}_1$, und die beiden projektiven Ebenenbüschel

$$|\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3|(1234) \barwedge t_{\mathfrak{A}_1}(1234)$$

erzeugen ein Hyperboloid, welches die ganze $C_I^{(4)}$ enthält; die Ebene durch $t_{\mathfrak{A}_1}$, welche der Ebene $[\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_1]$ des ersten Ebenenbüschels entspricht, wird die Schmiegungsebene im Punkte $\mathfrak{A}_1$ der $C_I^{(4)}$ sein. Vertauscht man $\mathfrak{A}_1$ mit $\mathfrak{A}_2$ oder $\mathfrak{A}_3$, so erhält man auf gleiche Weise zwei andere Hyperboloide, und alle drei schneiden sich in derselben gesuchten Raumkurve $C_I^{(4)}$, die schon durch zwei von ihnen bestimmt wird.

Hieraus geht nun hervor, daß ein Punktetripel zur Bestimmung einer $C_I^{(4)}$ äquivalent ist mit vier beliebigen unabhängig gewählten Punkten derselben, also zwei Punktetripel mit acht Punkten, die zur Konstruktion der $C_I^{(4)}$ erforderlich sind.

§ 6. Tetraëder, die der $C_I^{(4)}$ einbeschrieben sind, und deren Seitenflächen ihr in vier anderen Punkten einer Ebene begegnen.

Nehmen wir drei beliebige Tripel

$$\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3, \quad \mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_3, \quad \mathfrak{C}_1\mathfrak{C}_2\mathfrak{C}_3$$

auf der $C_I^{(4)}$ an (die nicht mehr willkürlich gewählt werden dürfen, da ja die Raumkurve schon durch zwei derselben bestimmt wird; auch ist das dritte Punktetripel $\mathfrak{C}_1\mathfrak{C}_2\mathfrak{C}_3$ nicht zu verwechseln mit dem gleichbezeichneten auf S. 19, welches durch die beiden ersten vollständig bestimmt ist), dann läßt

sich durch folgende je drei Strahlen immer ein Hyperboloid legen, welches die ganze $C_I^{(4)}$ enthält (S. 18):

$$
\begin{array}{lll}
|\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1| & |\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_3| & |\mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_2|, \\
|\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_2| & |\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_1| & |\mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_3|, \\
|\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_3| & |\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2| & |\mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_1|; \\
|\mathfrak{A}_1\mathfrak{C}_1| & |\mathfrak{A}_2\mathfrak{C}_3| & |\mathfrak{A}_3\mathfrak{C}_2|, \\
|\mathfrak{A}_1\mathfrak{C}_2| & |\mathfrak{A}_2\mathfrak{C}_1| & |\mathfrak{A}_3\mathfrak{C}_3|, \\
|\mathfrak{A}_1\mathfrak{C}_3| & |\mathfrak{A}_2\mathfrak{C}_2| & |\mathfrak{A}_3\mathfrak{C}_1|; \\
|\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1| & |\mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_3| & |\mathfrak{B}_3\mathfrak{C}_2|, \\
|\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_2| & |\mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_1| & |\mathfrak{B}_3\mathfrak{C}_3|, \\
|\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_3| & |\mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_2| & |\mathfrak{B}_3\mathfrak{C}_1|;
\end{array}
$$

wir haben also neun Hyperboloide, welche durch dieselbe Raumkurve $C_I^{(4)}$ gehen.

Legen wir nun die Ebene $[\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1]$, so kann dieselbe nur noch in einem einzigen vierten Punkte $\mathfrak{D}_1$ der $C_I^{(4)}$ begegnen, und weil $|\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1|$ der einen Regelschar des ersten Hyperboloids angehört, so muß $|\mathfrak{C}_1\mathfrak{D}_1|$ der andern Regelschar desselben angehören (Seite 10), also auch den übrigen Erzeugenden der ersten Regelschar desselben begegnen; daraus folgt, daß $\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_3\mathfrak{C}_1\mathfrak{D}_1$ in einer Ebene, und auch $\mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_1\mathfrak{D}_1$ in einer Ebene liegen.

Andererseits geht die Ebene $[\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1]$ auch durch die Erzeugende $|\mathfrak{A}_1\mathfrak{C}_1|$ des vierten Hyperboloids, folglich muß $|\mathfrak{B}_1\mathfrak{D}_1|$ der zweiten Regelschar desselben angehören, also müssen $\mathfrak{A}_2\mathfrak{C}_3\mathfrak{B}_1\mathfrak{D}_1$ und $\mathfrak{A}_3\mathfrak{C}_2\mathfrak{B}_1\mathfrak{D}_1$ in je einer Ebene liegen. Endlich geht die Ebene $[\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1]$ durch die Erzeugende $|\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1|$ des siebenten Hyperboloids, also müssen auch $\mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_3\mathfrak{A}_1\mathfrak{D}_1$ und $\mathfrak{B}_3\mathfrak{C}_2\mathfrak{A}_1\mathfrak{D}_1$ in je einer Ebene liegen. Durch den Punkt $\mathfrak{D}_1$ gehen also im ganzen neun Ebenen, da, wie in gleicher Weise sich ergiebt, auch $[\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_2]$ und $[\mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_3\mathfrak{C}_3]$ durch $\mathfrak{D}_1$ gehen. Ebenso finden wir zwei andere Punkte $\mathfrak{D}_2$ und $\mathfrak{D}_3$ der $C_I^{(4)}$, durch welche je neun Ebenen gehen:

$$
\left.\begin{array}{lll}
[\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1] & [\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_3] & [\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_3\mathfrak{C}_2] \\
[\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_3] & [\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_2] & [\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_3\mathfrak{C}_1] \\
[\mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_2] & [\mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_1] & [\mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_3\mathfrak{C}_3]
\end{array}\right\}
\begin{array}{l}
\text{schneiden sich in einem} \\
\text{und demselben Punkte } \mathfrak{D}_1 \\
\text{der } C_I^{(4)},
\end{array}
$$

$$\left.\begin{array}{lll}[\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_3] & [\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_2] & [\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_3\mathfrak{C}_1] \\ [\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_2] & [\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_1] & [\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_3\mathfrak{C}_3] \\ [\mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1] & [\mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_3] & [\mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_3\mathfrak{C}_2]\end{array}\right\} \text{schneiden sich in einem und demselben Punkte } \mathfrak{D}_2 \text{ der } C_I^{(4)},$$

$$\left.\begin{array}{lll}[\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_2] & [\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_1] & [\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_3\mathfrak{C}_3] \\ [\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1] & [\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_3] & [\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_3\mathfrak{C}_2] \\ [\mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_3] & [\mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_2] & [\mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_3\mathfrak{C}_1]\end{array}\right\} \text{schneiden sich in einem und demselben Punkte } \mathfrak{D}_3 \text{ der } C_I^{(4)}.$$

Diese drei neuen Punkte $\mathfrak{D}_1\mathfrak{D}_2\mathfrak{D}_3$ der $C_I^{(4)}$ bilden offenbar ein viertes Punktetripel der $C_I^{(4)}$, weil sie die vierten Schnittpunkte der Raumkurve mit den drei durch die Sekante $|\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1|$ und die Ecken des Tripels $\mathfrak{C}_1\mathfrak{C}_3\mathfrak{C}_2$ gelegten drei Ebenen sind (Seite 27).

Diese vier Punktetripel $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3$, $\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_3$, $\mathfrak{C}_1\mathfrak{C}_2\mathfrak{C}_3$, $\mathfrak{D}_1\mathfrak{D}_2\mathfrak{D}_3$ stehen in dem eigentümlichen Zusammenhange mit einander, daß ebenso, wie wir aus den drei ersten das vierte abgeleitet haben, auch aus irgend dreien von ihnen immer das vierte hervorgeht, wie aus der obigen Zusammenstellung unmittelbar einleuchtet.

Solche zwölf Punkte bilden eine derartige Konfiguration auf der $C_I^{(4)}$, daß sie zu je vieren in 27 Ebenen liegen, und durch jeden Punkt neun dieser Ebenen gehen. Verbinden wir jeden Punkt eines der vier zusammengehörigen Tripel $\mathfrak{A}_i\mathfrak{B}_i\mathfrak{C}_i\mathfrak{D}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ mit jedem Punkte eines andern, so erhalten wir $9 \cdot 6 = 54$ Gerade l; es liegen in jeder der 27 Ebenen ε vier der 12 Punkte $\mathfrak{p}$ und sechs Gerade l (die Verbindungslinien jener vier Punkte); durch jede Gerade l gehen drei Ebenen ε, und auf jeder Geraden l liegen zwei Punkte $\mathfrak{p}$, während durch jeden Punkt $\mathfrak{p}$ neun Gerade l und neun Ebenen ε gehen, so daß wir die Konfiguration in folgender Weise darstellen können:*

---

* A. Ameseder, Über Konfigurationen auf der Raumkurve vierter Ordnung erster Species (Sitz.-Ber. der Wiener Akademie d. Wissensch. II. Abt. Jhrgg. 1883 S. 1179.)

(12) $\mathfrak{p}$	(54) l	(27) ε
*	$2\mathfrak{p}$	$4\mathfrak{p}$
$9l$	*	$6l$
9ε	3ε	* .

Ein weiterer Zusammenhang dieser vier Punktetripel der $C_I^{(4)}$ ergiebt sich aus folgender Bemerkung: Nehmen wir die vier Punkte der $C_I^{(4)}$, welche in einer beliebigen dieser 27 Ebenen liegen, z. B.

$$\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_1\mathfrak{D}_3,$$

und lassen die Indices cyklisch fortschreiten

$$\mathfrak{A}_2 \quad \mathfrak{B}_3 \quad \mathfrak{C}_2 \quad \mathfrak{D}_1,$$

so erhalten wir vier neue Punkte, die nicht in einer Ebene liegen, sondern die Ecken eines der $C_I^{(4)}$ einbeschriebenen Tetraëders sind; suchen wir aber die vierten Schnittpunkte der $C_I^{(4)}$ mit den Seitenflächen dieses Tetraëders auf, so erhalten wir:

$[\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_3\mathfrak{C}_2]$ begegnet der $C_I^{(4)}$ im Punkte $\mathfrak{D}_3$,
$[\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_3\mathfrak{D}_1]$ „ „ „ „ „ $\mathfrak{C}_1$,
$[\mathfrak{A}_2\mathfrak{C}_2\mathfrak{D}_1]$ „ „ „ „ „ $\mathfrak{B}_2$,
$[\mathfrak{B}_3\mathfrak{C}_2\mathfrak{D}_1]$ „ „ „ „ „ $\mathfrak{A}_1$,

und diese vier Punkte $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_1\mathfrak{D}_3$ liegen in einer Ebene, nämlich der zuerst gewählten. Wir haben also ein der $C_I^{(4)}$ einbeschriebenes Tetraëder gefunden, dessen vier Seitenflächen ihr in vier neuen Punkten einer Ebene begegnen; lassen wir die vorigen Indices nochmals cyklisch fortschreiten, so erhalten wir die Punkte

$$\mathfrak{A}_3 \quad \mathfrak{B}_1 \quad \mathfrak{C}_3 \quad \mathfrak{D}_2,$$

welche nicht in einer Ebene liegen, sondern ein zweites der $C_I^{(4)}$ einbeschriebenes Tetraëder bilden, dessen Seitenfläche

$[\mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_3]$ der $C_I^{(4)}$ begegnet in $\mathfrak{D}_3$,
$[\mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_1\mathfrak{D}_2]$ „ „ „ „ $\mathfrak{C}_1$,
$[\mathfrak{A}_3\mathfrak{C}_3\mathfrak{D}_2]$ „ „ „ „ $\mathfrak{B}_2$,
$[\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_3\mathfrak{D}_2]$ „ „ „ „ $\mathfrak{A}_1$,

und diese vier Punkte liegen ebenfalls in einer Ebene, denn es sind wieder dieselben, von denen wir ausgingen. Wir haben also zwei der Raumkurve einbeschriebene Tetraëder, deren Seitenflächen der $C_I^{(4)}$ in denselben vier Punkten einer Ebene begegnen.

Es leuchtet ein, daß die gefundene Eigenschaft, zu der wir von einer beliebigen der 27 Ebenen ausgehend gelangten, für jede andere derselben in gleicher Weise gilt. Wir können also folgenden Satz aussprechen:

Aus den Ecken der vier zusammenhängenden Punktetripel $\mathfrak{A}_i\mathfrak{B}_i\mathfrak{C}_i\mathfrak{D}_i$ $(i=1,2,3)$ der $C_I^{(4)}$ lassen sich 54 der Raumkurve einbeschriebene Tetraëder bilden, deren jedes die Eigenschaft hat, daß seine vier Seitenflächen der $C_I^{(4)}$ in weiteren vier Punkten begegnen, die in einer Ebene liegen. Diese 54 Tetraëder treten paarweise zusammen, indem für jedes Paar die sie begleitende Ebene (in welcher die Treffpunkte der vier Seitenflächen sich befinden) dieselbe wird. Zwei solche Tetraëder mit ihren acht Ecken und den gemeinsamen vier Treffpunkten in der begleitenden Ebene erfüllen die ganze Gruppe der 12 Punkte $\mathfrak{A}_i\mathfrak{B}_i\mathfrak{C}_i\mathfrak{D}_i$ $(i=1,2,3)$; die 27 begleitenden Ebenen sind die sämtlichen in der vorigen Konfiguration enthaltenen (Seite 33 und 34).

Die vollständige Gruppe dieser 27 Tetraëderpaare lautet:

$$\begin{cases}\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_2\mathfrak{D}_2\\ \mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_3\mathfrak{C}_3\mathfrak{D}_3\end{cases} \quad \begin{cases}\mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_1\mathfrak{D}_2\\ \mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_3\mathfrak{C}_2\mathfrak{D}_3\end{cases} \quad \begin{cases}\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_3\mathfrak{D}_2\\ \mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_3\mathfrak{C}_1\mathfrak{D}_3\end{cases}$$

$$\begin{cases}\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_3\mathfrak{C}_1\mathfrak{D}_2\\ \mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_2\mathfrak{D}_3\end{cases} \quad \begin{cases}\mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_3\mathfrak{C}_3\mathfrak{D}_2\\ \mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1\mathfrak{D}_3\end{cases} \quad \begin{cases}\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_3\mathfrak{C}_2\mathfrak{D}_2\\ \mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_3\mathfrak{D}_3\end{cases}$$

$$\begin{cases}\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_3\mathfrak{D}_2\\ \mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_1\mathfrak{D}_3\end{cases} \quad \begin{cases}\mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_2\mathfrak{D}_2\\ \mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_3\mathfrak{D}_3\end{cases} \quad \begin{cases}\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1\mathfrak{D}_2\\ \mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_2\mathfrak{D}_3\end{cases}$$

$$\begin{cases}\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_1\mathfrak{D}_3\\ \mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_3\mathfrak{C}_2\mathfrak{D}_1\end{cases} \quad \begin{cases}\mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_3\mathfrak{D}_3\\ \mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_3\mathfrak{C}_1\mathfrak{D}_1\end{cases} \quad \begin{cases}\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_2\mathfrak{D}_3\\ \mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_3\mathfrak{C}_3\mathfrak{D}_1\end{cases}$$

$$\begin{cases}\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_3\mathfrak{C}_3\mathfrak{D}_3\\ \mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1\mathfrak{D}_1\end{cases} \quad \begin{cases}\mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_3\mathfrak{C}_2\mathfrak{D}_3\\ \mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_3\mathfrak{D}_1\end{cases} \quad \begin{cases}\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_3\mathfrak{C}_1\mathfrak{D}_3\\ \mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_2\mathfrak{D}_1\end{cases}$$

$$\begin{cases}\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_2\mathfrak{D}_3\\ \mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_3\mathfrak{D}_1\end{cases} \quad \begin{cases}\mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1\mathfrak{D}_3\\ \mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_2\mathfrak{D}_1\end{cases} \quad \begin{cases}\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_3\mathfrak{D}_3\\ \mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_1\mathfrak{D}_1\end{cases}$$

$$\begin{cases}\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_3\mathfrak{D}_1\\ \mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_3\mathfrak{C}_1\mathfrak{D}_2\end{cases} \quad \begin{cases}\mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_2\mathfrak{D}_1\\ \mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_3\mathfrak{C}_3\mathfrak{D}_2\end{cases} \quad \begin{cases}\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_1\mathfrak{D}_1\\ \mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_3\mathfrak{C}_2\mathfrak{D}_2\end{cases}$$

$$\begin{cases}\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_3\mathfrak{C}_2\mathfrak{D}_1\\ \mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_3\mathfrak{D}_2\end{cases} \quad \begin{cases}\mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_3\mathfrak{C}_1\mathfrak{D}_1\\ \mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_2\mathfrak{D}_2\end{cases} \quad \begin{cases}\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_3\mathfrak{C}_3\mathfrak{D}_1\\ \mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1\mathfrak{D}_2\end{cases}$$

$$\begin{cases}\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1\mathfrak{D}_1\\ \mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_2\mathfrak{D}_2\end{cases} \quad \begin{cases}\mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_3\mathfrak{D}_1\\ \mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_1\mathfrak{D}_2\end{cases} \quad \begin{cases}\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_2\mathfrak{D}_1\\ \mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_3\mathfrak{D}_2,\end{cases}$$

und für jedes dieser Tetraëderpaare sind die übrigen vier von den gesamten zwölf Punkten diejenigen, welche in der gemeinsamen begleitenden Ebene liegen.

Jedes solches Tetraëderpaar besitzt auch die weitere Eigenschaft, daß die sechs Kanten des einen Tetraëders den sechs Kanten des andern begegnen, eine Lage, die wir als „anbeschrieben“ bezeichnen können, so zwar daß, wenn eine Kante des einen Tetraëders einer Kante des andern begegnet, auch die Gegenkante des ersten der Gegenkante des zweiten begegnen wird.

Nehmen wir z. B. die beiden Tetraëder

$$\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_2\mathfrak{D}_2 \quad \text{und} \quad \mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_3\mathfrak{C}_3\mathfrak{D}_3,$$

so begegnet die Kante des ersten $|\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2|$ der Kante des zweiten $|\mathfrak{C}_3\mathfrak{D}_3|$ und auch die Gegenkante des ersten $|\mathfrak{C}_2\mathfrak{D}_2|$ der Gegenkante des zweiten $|\mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_3|$, also treffen sich

$$\begin{array}{ll} |\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2| \text{ und } |\mathfrak{C}_3\mathfrak{D}_3|, & |\mathfrak{C}_2\mathfrak{D}_2| \text{ und } |\mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_3|, \\ |\mathfrak{A}_2\mathfrak{C}_2| \text{ und } |\mathfrak{B}_3\mathfrak{D}_3|, & |\mathfrak{B}_2\mathfrak{D}_2| \text{ und } |\mathfrak{A}_3\mathfrak{C}_3|, \\ |\mathfrak{A}_2\mathfrak{D}_2| \text{ und } |\mathfrak{B}_3\mathfrak{C}_3|, & |\mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_2| \text{ und } |\mathfrak{A}_3\mathfrak{D}_3|, \end{array}$$

und dasselbe gilt für jedes der 27 Tetraëderpaare.

Die Eigenschaft eines der $C_I^{(4)}$ einbeschriebenen Tetraëders, daß die vierten Schnittpunkte seiner Seitenflächen mit der Raumkurve in einer Ebene liegen, ist analog der bekannten Eigenschaft des Tripels einer ebenen Kurve dritter Ordnung $\mathfrak{K}^{(3)}$, welches ein der $\mathfrak{K}^{(3)}$ einbeschriebenes Dreieck liefert, dessen drei Seiten der $\mathfrak{K}^{(3)}$ in drei weiteren Punkten einer Geraden begegnen.

Ferner lassen sich die zwölf Punkte der vier zusammengehörigen Punktetripel $\mathfrak{A}_i\mathfrak{B}_i\mathfrak{C}_i\mathfrak{D}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ auf 27 Arten zu je vieren in drei Ebenen verteilen. Diese Verteilungen sind folgende:

$$[\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1\mathfrak{D}_1] \quad [\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_3\mathfrak{D}_3] \quad [\mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_3\mathfrak{C}_2\mathfrak{D}_2]$$
$$[\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1\mathfrak{D}_1] \quad [\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_3\mathfrak{C}_2\mathfrak{D}_3] \quad [\mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_3\mathfrak{D}_2]$$
$$[\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1\mathfrak{D}_1] \quad [\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_3\mathfrak{C}_3\mathfrak{D}_2] \quad [\mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_2\mathfrak{D}_3],$$

$$[\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_2\mathfrak{D}_3] \quad [\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_1\mathfrak{D}_2] \quad [\mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_3\mathfrak{C}_3\mathfrak{D}_1]$$
$$[\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_2\mathfrak{D}_3] \quad [\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_3\mathfrak{C}_3\mathfrak{D}_2] \quad [\mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_1\mathfrak{D}_1]$$
$$[\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_2\mathfrak{D}_3] \quad [\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_3\mathfrak{C}_1\mathfrak{D}_1] \quad [\mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_3\mathfrak{D}_2],$$

$$[\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_3\mathfrak{D}_2] \quad [\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_3\mathfrak{C}_1\mathfrak{D}_1] \quad [\mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_2\mathfrak{D}_3]$$
$$[\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_3\mathfrak{D}_2] \quad [\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_3\mathfrak{C}_2\mathfrak{D}_3] \quad [\mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_1\mathfrak{D}_1]$$
$$[\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_3\mathfrak{D}_2] \quad [\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_2\mathfrak{D}_1] \quad [\mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_3\mathfrak{C}_1\mathfrak{D}_3],$$

$$[\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_2\mathfrak{D}_2] \quad [\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_3\mathfrak{C}_1\mathfrak{D}_1] \quad [\mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_3\mathfrak{D}_3]$$
$$[\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_2\mathfrak{D}_2] \quad [\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_3\mathfrak{D}_1] \quad [\mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_3\mathfrak{C}_1\mathfrak{D}_3]$$
$$[\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_2\mathfrak{D}_2] \quad [\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1\mathfrak{D}_3] \quad [\mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_3\mathfrak{C}_3\mathfrak{D}_1],$$

$$[\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_1\mathfrak{D}_3] \quad [\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_2\mathfrak{D}_2] \quad [\mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_3\mathfrak{C}_3\mathfrak{D}_1]$$
$$[\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_1\mathfrak{D}_3] \quad [\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_3\mathfrak{D}_1] \quad [\mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_3\mathfrak{C}_2\mathfrak{D}_2]$$
$$[\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_1\mathfrak{D}_3] \quad [\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_3\mathfrak{C}_3\mathfrak{D}_2] \quad [\mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_2\mathfrak{D}_1],$$

$$[\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_3\mathfrak{D}_1] \quad [\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_2\mathfrak{D}_2] \quad [\mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_3\mathfrak{C}_1\mathfrak{D}_3]$$
$$[\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_3\mathfrak{D}_1] \quad [\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1\mathfrak{D}_3] \quad [\mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_3\mathfrak{C}_2\mathfrak{D}_2]$$
$$[\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_3\mathfrak{D}_1] \quad [\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_3\mathfrak{C}_2\mathfrak{D}_3] \quad [\mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1\mathfrak{D}_2],$$

$$[\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_3\mathfrak{C}_3\mathfrak{D}_3] \quad [\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_2\mathfrak{D}_2] \quad [\mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_1\mathfrak{D}_1]$$
$$[\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_3\mathfrak{C}_3\mathfrak{D}_3] \quad [\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_2\mathfrak{D}_1] \quad [\mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1\mathfrak{D}_2]$$
$$[\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_3\mathfrak{C}_3\mathfrak{D}_3] \quad [\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_1\mathfrak{D}_2] \quad [\mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_2\mathfrak{D}_1],$$

$$[\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_3\mathfrak{C}_1\mathfrak{D}_2] \quad [\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_2\mathfrak{D}_1] \quad [\mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_3\mathfrak{D}_3]$$
$$[\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_3\mathfrak{C}_1\mathfrak{D}_2] \quad [\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_3\mathfrak{D}_3] \quad [\mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_2\mathfrak{D}_1]$$
$$[\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_3\mathfrak{C}_1\mathfrak{D}_2] \quad [\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_3\mathfrak{D}_1] \quad [\mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_2\mathfrak{D}_3],$$

$$[\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_3\mathfrak{C}_2\mathfrak{D}_1] \quad [\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_1\mathfrak{D}_2] \quad [\mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_3\mathfrak{D}_3]$$
$$[\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_3\mathfrak{C}_2\mathfrak{D}_1] \quad [\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_3\mathfrak{D}_3] \quad [\mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1\mathfrak{D}_2]$$
$$[\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_3\mathfrak{C}_2\mathfrak{D}_1] \quad [\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1\mathfrak{D}_3] \quad [\mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_3\mathfrak{D}_2].$$

Da die acht Durchschnittspunkte eines Ebenenpaares mit einer $C_I^{(4)}$ immer eine Gruppe von acht associierten Punkten bilden (Seite 4), so lassen sich aus den zwölf Punkten $\mathfrak{A}_i\mathfrak{B}_i\mathfrak{C}_i\mathfrak{D}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ in großer Anzahl Gruppen von acht associierten Punkten herausnehmen.

Wir führen endlich noch einen Zusammenhang an, in welchem die vier Punktetripel $\mathfrak{A}_i\mathfrak{B}_i\mathfrak{C}_i\mathfrak{D}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ der $C_I^{(4)}$ mit einander stehen; jedes derselben hat nämlich, wie wir wissen (Seite 25), die Eigenschaft, daß seine drei Schmiegungsebenen sich in dem vierten Schnittpunkte der Verbindungsebene begegnen; nennen wir die Schmiegungspunkte dieser vier Tripel $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}$, so zeigt sich, daß dieselben in einer Ebene liegen. Dies folgt aus einem Reye'schen Satze:*

„Wenn eine Ebene der $C_I^{(4)}$ in vier Punkten begegnet, so begegnen die vier Schmiegungsebenen in denselben der $C_I^{(4)}$ in vier neuen Punkten, die wiederum in einer Ebene liegen.“ Den Beweis dieses Satzes, der wiederum eine Analogie mit einer bekannten Eigenschaft der ebenen Kurve dritter Ordnung darbietet, behalten wir uns für den nächsten Paragraphen vor.

Da, wie wir gesehen haben, die vier Punkte

$$\mathfrak{A}_1 \ \mathfrak{B}_1 \ \mathfrak{C}_1 \ \mathfrak{D}_1$$

der $C_I^{(4)}$ in einer Ebene liegen, und die vier Schmiegungsebenen in denselben der $C_I^{(4)}$ in den neuen Punkten $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}$ begegnen, so müssen also auch diese in einer Ebene liegen:

Zu jedem der vier Punktetripel $\mathfrak{A}_i\mathfrak{B}_i\mathfrak{C}_i\mathfrak{D}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ gehört ein gemeinschaftlicher Schmiegungspunkt. Diese vier Schmiegungspunkte $\mathfrak{A}\ \mathfrak{B}\ \mathfrak{C}\ \mathfrak{D}$ liegen in einer Ebene; oder auch die begleitenden Punkte zu den vier Ebenen, welche die vier Punktetripel bestimmen, liegen in einer Ebene.

---

* Th. Reye, Sopra le curve gobbe di quart' ordine e prima specie e i loro punti d'intersezione con superficie di secondo grado (Ann. di Matem. pur. ed. applic. Serie II tomo II pag. 122 ed 129).



Umgekehrt schließen wir:

Schneidet eine beliebige Ebene die $C_I^{(4)}$ in vier Punkten $\mathfrak{A}\ \mathfrak{B}\ \mathfrak{C}\ \mathfrak{D}$, und bestimmt man zu jedem derselben als Schmiegungspunkt das zugehörige einzige reelle Punktetripel der $C_I^{(4)}$ (Seite 28), so sind solche vier Punktetripel diejenigen, welche in dem oben auseinandergesetzten Zusammenhange stehen.

§ 7. Die Reye'schen Sätze über Gruppen von acht associierten Punkten auf der $C_I^{(4)}$.

Wir haben gesehen (S. 5ff.), daß durch acht beliebig im Raume liegende von einander unabhängige Punkte die Raumkurve $C_I^{(4)}$ vollständig und eindeutig bestimmt wird; dagegen schneidet eine beliebige $F^{(2)}$, die nicht die ganze $C_I^{(4)}$ enthält, dieselbe im allgemeinen in acht Punkten, die nicht von einander unabhängig sind, sondern in dem Zusammenhange mit einander stehen, daß jede $F^{(2)}$, die durch sieben dieser Punkte geht, auch den achten enthalten muß. Solche acht Punkte bilden eine Gruppe von acht associierten Punkten, und es giebt deren natürlich unendlich viele auf jeder $C_I^{(4)}$; insbesondere begegnen zwei Ebenen der $C_I^{(4)}$ in zweimal vier Punkten, die zusammen eine Gruppe von acht associierten Punkten bilden, und umgekehrt: Liegen von acht associierten Punkten vier in einer Ebene, so müssen auch die übrigen vier in einer Ebene liegen.

Durch acht associierte Punkte ist eine $C_I^{(4)}$ nicht vollständig bestimmt, sondern es gehen durch dieselben ∞^2 Flächen $F^{(2)}$ und ∞^1 Raumkurven $C_I^{(4)}$, nämlich die Schnittlinien je zweier von jenen Flächen $F^{(2)}$, und umgekehrt liegen zwei verschiedene $C_I^{(4)}$, die durch dieselben acht associierten Punkte gehen, immer auf einer $F^{(2)}$. Unter den unendlich vielen $C_I^{(4)}$, welche durch dieselben acht associierten Punkte gehen, giebt es auch solche, die ausarten in eine Gerade g und eine Raumkurve dritter Ordnung $C^{(3)}$. Nennen wir $\mathfrak{a}\ \mathfrak{b}\ \mathfrak{c}\ \mathfrak{d}\ \mathfrak{e}\ \mathfrak{f}\ \mathfrak{g}\ \mathfrak{h}$ die acht associierten Punkte einer Gruppe, so läßt sich durch die sechs Punkte $\mathfrak{a}\ \mathfrak{b}\ \mathfrak{c}\ \mathfrak{d}\ \mathfrak{e}\ \mathfrak{f}$ eine einzige völlig bestimmte $C^{(3)}$ legen und $\mathfrak{g}\mathfrak{h}$ durch eine Gerade g verbinden; das Ensemble von $gC^{(3)}$ bildet eine ausgeartete

$C_I^{(4)}$, die durch die acht associierten Punkte geht. Das einzige völlig bestimmte Hyperboloid $\mathfrak{H}^{(2)}$, welches durch die Gerade $g = |\mathfrak{g}\mathfrak{h}|$ und die Punkte $\mathfrak{a}\ \mathfrak{b}\ \mathfrak{c}\ \mathfrak{d}\ \mathfrak{e}\ \mathfrak{f}$ gelegt werden kann, muß durch die ganze Raumkurve $|g C^{(3)}|$ gehen, weil es mit ihr mehr als acht Punkte gemein hat; es geht also auch durch die ganze $C^{(3)}$. Jede durch g gelegte Ebene trifft die $C^{(3)}$ in drei Punkten; sie schneidet $\mathfrak{H}^{(2)}$ in einer Geraden l der zweiten Regelschar, und da l bereits einen Punkt der Raumkurve $|g C^{(3)}|$ enthält, nämlich den Schnittpunkt (gl), so kann l nur noch einen einzigen zweiten Punkt derselben enthalten, der auf der $C^{(3)}$ liegen muß; die Gerade g muß daher der $C^{(3)}$ in zwei Punkten begegnen, d. h. eine Sekante der $C^{(3)}$, also eine gemeinschaftliche Sekante für die $C^{(3)}$ und jede beliebige $C_I^{(4)}$ aus dem Büschel sein. Wir schließen hieraus die theoretisch einfachste Konstruktion (vgl. S. 4 Anm.) des achten Punktes einer Gruppe von associierten Punkten, sobald sieben derselben gegeben sind:

Legt man durch sechs Punkte einer Gruppe von acht associierten Punkten die völlig bestimmte Raumkurve $C^{(3)}$ und durch den siebenten die einzige Sekante derselben, so enthält dieselbe auch den achten Punkt der Gruppe.

Umgekehrt: Giebt man eine $C_I^{(4)}$ und legt durch sechs Punkte $\mathfrak{a}\ \mathfrak{b}\ \mathfrak{c}\ \mathfrak{d}\ \mathfrak{e}\ \mathfrak{f}$ derselben die völlig bestimmte $C^{(3)}$, so haben die beiden Raumkurven noch eine Gerade g als gemeinschaftliche Sekante, die der $C_I^{(4)}$ in zwei Punkten $\mathfrak{x}\ \mathfrak{y}$ begegnet, welche mit $\mathfrak{a}\ \mathfrak{b}\ \mathfrak{c}\ \mathfrak{d}\ \mathfrak{e}\ \mathfrak{f}$ einer Gruppe von acht associierten Punkten angehören. $C_I^{(4)}$ und $C^{(3)}$ liegen aber auf einem Hyperboloid $\mathfrak{H}^{(2)}$, da zwei Raumkurven vierter Ordnung, die durch dieselben acht Punkte gehen, immer auf einer $F^{(2)}$ liegen; $|\mathfrak{x}\mathfrak{y}| = g$ gehört einer Regelschar dieses Hyperboloids an, welches durch die beiden Raumkurven $C^{(3)}$ und $C_I^{(4)}$ völlig bestimmt ist, während die Erzeugende $|\mathfrak{x}\mathfrak{y}|$ sich verändert und eine ganze Regelschar des Hyperboloids durchläuft.

Wir schließen also:

Jede durch sechs Punkte $\mathfrak{a}\ \mathfrak{b}\ \mathfrak{c}\ \mathfrak{d}\ \mathfrak{e}\ \mathfrak{f}$ einer $C_I^{(4)}$ gelegte $F^{(2)}$ schneidet dieselbe noch in zwei weiteren Punkten $\mathfrak{x}\ \mathfrak{y}$ einer Gruppe von acht associierten

Punkten; die veränderliche Sekante $|\mathfrak{x}\mathfrak{y}| = g$ durchläuft eine Regelschar eines Hyperboloids, welches durch die ganze $C_I^{(4)}$ geht.

Zieht man umgekehrt auf einem durch die $C_I^{(4)}$ gelegten Hyperboloid $\mathfrak{H}^{(2)}$ zwei Erzeugende derselben Regelschar, welche in $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_1$ der Raumkurve begegnen, legt man dann durch die beiden Punkte $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ eine beliebige $F^{(2)}$, die nicht durch die ganze Raumkurve geht, sondern ihr im allgemeinen in sechs weiteren Punkten $\mathfrak{a}\ \mathfrak{b}\ \mathfrak{c}\ \mathfrak{d}\ \mathfrak{e}\ \mathfrak{f}$ begegnen wird, die mit $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$ eine Gruppe von acht associierten Punkten bilden, so müssen auch die acht Punkte $\mathfrak{a}\ \mathfrak{b}\ \mathfrak{c}\ \mathfrak{d}\ \mathfrak{e}\ \mathfrak{f}\ \mathfrak{x}_1\ \mathfrak{y}_1$ eine Gruppe von acht associierten Punkten bilden. Legt man weiter durch die beiden Punkte $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{y}_1$ eine neue Fläche $F_1^{(2)}$, die nicht durch die ganze Raumkurve geht, sondern ihr in sechs neuen Punkten $\mathfrak{a}_1\ \mathfrak{b}_1\ \mathfrak{c}_1\ \mathfrak{d}_1\ \mathfrak{e}_1\ \mathfrak{f}_1$ begegnen wird, die mit $\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_1$ eine Gruppe von acht associierten Punkten bilden, dann müssen auch die acht Punkte $\mathfrak{a}_1\ \mathfrak{b}_1\ \mathfrak{c}_1\ \mathfrak{d}_1\ \mathfrak{e}_1\ \mathfrak{f}_1\ \mathfrak{x}\ \mathfrak{y}$ einer solchen Gruppe angehören; also gilt der Satz:

Hat man auf einer $C_I^{(4)}$ zwei Gruppen von je acht associierten Punkten, und gehören sechs Punkte der einen Gruppe mit zwei Punkten der andern Gruppe einer neuen Gruppe von acht associierten Punkten an, so müssen auch die übrigen beiden Punkte der ersten Gruppe mit den übrigen sechs Punkten der zweiten Gruppe eine neue Gruppe von acht associierten Punkten bilden.

Der obige Satz läßt sich auch so umkehren: Hat man auf einer $C_I^{(4)}$ eine Gruppe von acht associierten Punkten $\mathfrak{A}\ \mathfrak{A}_1\ \mathfrak{p}\ \mathfrak{q}\ \mathfrak{r}\ \mathfrak{p}_1\ \mathfrak{q}_1\ \mathfrak{r}_1$ und legt durch die Gerade $|\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1|$ und die sechs Punkte $\mathfrak{p}\ \mathfrak{q}\ \mathfrak{r}\ \mathfrak{p}_1\ \mathfrak{q}_1\ \mathfrak{r}_1$ das völlig bestimmte einzige Hyperboloid $\mathfrak{H}^{(2)}$, so muß dasselbe durch die ganze Raumkurve gehen. Legt man nun die Ebene $[\mathfrak{p}\mathfrak{q}\mathfrak{r}]$, welche der $C_I^{(4)}$ zum viertenmale in $\mathfrak{B}$ begegnen möge, und die Ebene $[\mathfrak{p}_1\mathfrak{q}_1\mathfrak{r}_1]$, welche der $C_I^{(4)}$ zum viertenmale in $\mathfrak{B}_1$ begegnen möge, so muß auch $|\mathfrak{B}\mathfrak{B}_1|$ eine Erzeugende des Hyperboloids $\mathfrak{H}^{(2)}$ sein und derselben Regelschar, wie $|\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1|$, angehören; denn die acht Punkte $\mathfrak{p}\ \mathfrak{q}\ \mathfrak{r}\ \mathfrak{p}_1\ \mathfrak{q}_1\ \mathfrak{r}_1\ \mathfrak{B}\ \mathfrak{B}_1$ bilden auch eine Gruppe von

acht associierten Punkten, weil sie in zwei Ebenen der $C_I^{(4)}$ liegen, oder, was dasselbe sagt, das Ebenenpaar $[\mathfrak{p}\mathfrak{q}\mathfrak{r}]$ und $[\mathfrak{p}_1\mathfrak{q}_1\mathfrak{r}_1]$ als eine besondere durch diese sechs Punkte gelegte $F^{(2)}$ begegnet der $C_I^{(4)}$ in den beiden übrigen Punkten $\mathfrak{B}\mathfrak{B}_1$ der Gruppe. Durch $\mathfrak{B}$ giebt es aber nur eine einzige bestimmte Erzeugende des Hyperboloids $\mathfrak{H}^{(2)}$, welche derselben Regelschar wie $|\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1|$ angehört, und diese Erzeugende begegnet der $C_I^{(4)}$ noch in dem bestimmten Punkte $\mathfrak{B}_1$. Halten wir also die fünf willkürlich auf der $C_I^{(4)}$ zu wählenden Punkte $\mathfrak{A}\,\mathfrak{A}_1\,\mathfrak{p}\,\mathfrak{q}\,\mathfrak{r}$ fest, verändern aber $\mathfrak{p}_1\,\mathfrak{q}_1\,\mathfrak{r}_1$ (die ergänzenden Punkte der Gruppe von acht associierten Punkten zu den ersten fünf), so wird das durch $|\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1|$ und die $C_I^{(4)}$ gelegte Hyperboloid fest bleiben, und da $\mathfrak{p}\,\mathfrak{q}\,\mathfrak{r}$ fest bleiben, auch $\mathfrak{B}$, mithin auch $\mathfrak{B}_1$, und die veränderliche Ebene $[\mathfrak{p}_1\,\mathfrak{q}_1\,\mathfrak{r}_1]$ wird daher beständig durch den festen Punkt $\mathfrak{B}_1$ laufen; wir erhalten also den Satz:

Legt man durch fünf willkürlich gewählte Punkte einer $C_I^{(4)}$ alle möglichen $F^{(2)}$, deren jede im allgemeinen noch in drei weiteren Punkten der $C_I^{(4)}$ begegnet, so läuft die veränderliche Ebene, welche diese drei Punkte verbindet, beständig durch einen und denselben festen Punkt der $C_I^{(4)}$.

Legt man also durch $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}\,\mathfrak{e}$ einer $C_I^{(4)}$ die $F^{(2)}$, welche außerdem in $\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}\,\mathfrak{z}$ ihr begegnet, und ist $\mathfrak{O}$ der vierte Schnittpunkt der Ebene $[\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z}]$ mit der $C_I^{(4)}$, legt man alsdann durch $\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z}$ eine beliebige zweite $F_1^{(2)}$, die nicht durch die ganze $C_I^{(4)}$ läuft, sondern ihr im allgemeinen in fünf neuen Punkten $\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{b}_1\,\mathfrak{c}_1\,\mathfrak{d}_1\,\mathfrak{e}_1$ begegnet, dann wird auch jede durch $\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{b}_1\,\mathfrak{c}_1\,\mathfrak{d}_1\,\mathfrak{e}_1$ gelegte $F^{(2)}$ der $C_I^{(4)}$ außerdem in drei Punkten $\mathfrak{x}_1\,\mathfrak{y}_1\,\mathfrak{z}_1$ begegnen, deren Verbindungsebene $[\mathfrak{x}_1\,\mathfrak{y}_1\,\mathfrak{z}_1]$ durch $\mathfrak{O}$ gehen muß; also werden die acht Punkte $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}\,\mathfrak{e}\,\mathfrak{x}_1\,\mathfrak{y}_1\,\mathfrak{z}_1$ eine Gruppe von acht associierten Punkten bilden, und wir erhalten den Satz:

Hat man auf einer $C_I^{(4)}$ zwei Gruppen von je acht associierten Punkten, und gehören fünf Punkte der einen Gruppe mit drei Punkten der andern Gruppe einer neuen Gruppe von acht associierten Punkten an, dann müssen auch die übrigen drei Punkte der

ersten Gruppe mit den übrigen fünf Punkten der zweiten Gruppe eine neue Gruppe von acht associierten Punkten bilden.

Wenn wir durch fünf Punkte einer $C_I^{(4)}$ alle $F^{(2)}$ legen und die jedesmaligen übrigen drei Schnittpunkte derselben mit $C_I^{(4)}$ durch eine Ebene verbinden, die nach dem obigen Satze durch einen festen Punkt der $C_I^{(4)}$ läuft, so können wir diesen Punkt den „Gegenpunkt" zu den gegebenen fünf Punkten nennen und umgekehrt schließen, daß jede durch den Gegenpunkt gelegte Ebene der $C_I^{(4)}$ in drei weiteren Punkten begegnen wird, die mit den fünf gegebenen eine Gruppe von acht associierten Punkten bilden. Wenn wir durch sechs Punkte einer $C_I^{(4)}$ alle $F^{(2)}$ legen und die jedesmaligen übrigen beiden Schnittpunkte derselben mit $C_I^{(4)}$ durch eine Gerade verbinden, so beschreibt diese Gerade eine Regelschar eines Hyperboloids (Seite 41), und umgekehrt wird jede Erzeugende dieses Hyperboloids der $C_I^{(4)}$ in zwei Punkten begegnen, die mit den sechs gegebenen eine Gruppe von acht associierten Punkten bilden.

Nehmen wir nun nur vier Punkte $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}$ der $C_I^{(4)}$ an, legen durch dieselbe eine $F^{(2)}$, welche ihr in vier weiteren Punkten $\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}\,\mathfrak{z}\,\mathfrak{t}$ begegnet, legen dann eine beliebige andere $F_1^{(2)}$ durch $\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}\,\mathfrak{z}\,\mathfrak{t}$, die in weiteren Punkten $\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{b}_1\,\mathfrak{c}_1\,\mathfrak{d}_1$ der $C_I^{(4)}$ begegnet, und endlich durch $\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{b}_1\,\mathfrak{c}_1\,\mathfrak{d}_1$ eine dritte $F_2^{(2)}$, die in den Punkten $\mathfrak{x}_1\,\mathfrak{y}_1\,\mathfrak{z}_1\,\mathfrak{t}_1$ der $C_I^{(4)}$ außerdem begegnet, dann haben wir drei Gruppen von je acht associierten Punkten

$$\mathfrak{a}\;\mathfrak{b}\;\mathfrak{c}\;\mathfrak{d}\;\mathfrak{x}\;\mathfrak{y}\;\mathfrak{z}\;\mathfrak{t}$$
$$\mathfrak{x}\;\mathfrak{y}\;\mathfrak{z}\;\mathfrak{t}\;\mathfrak{a}_1\;\mathfrak{b}_1\;\mathfrak{c}_1\;\mathfrak{d}_1$$
$$\mathfrak{a}_1\;\mathfrak{b}_1\;\mathfrak{c}_1\;\mathfrak{d}_1\;\mathfrak{x}_1\;\mathfrak{y}_1\;\mathfrak{z}_1\;\mathfrak{t}_1,$$

und aus diesen folgt die vierte Gruppe von acht associierten Punkten

$$\mathfrak{x}_1\;\mathfrak{y}_1\;\mathfrak{z}_1\;\mathfrak{t}_1\;\mathfrak{a}\;\mathfrak{b}\;\mathfrak{c}\;\mathfrak{d}.$$

Denn schneidet die Ebene $[\mathfrak{y}\,\mathfrak{z}\,\mathfrak{t}]$ die $C_I^{(4)}$ zum viertenmale in $\mathfrak{x}'$, so ist $\mathfrak{x}'$ der Gegenpunkt zu den fünf Punkten $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}\,\mathfrak{x}$; schneidet die Ebene $[\mathfrak{x}'\,\mathfrak{y}_1\,\mathfrak{z}_1]$ zum viertenmale die $C_I^{(4)}$ in $\mathfrak{t}'$, so müssen, weil durch den Gegenpunkt $\mathfrak{x}'$ die Ebene $[\mathfrak{y}_1\,\mathfrak{z}_1\,\mathfrak{t}']$ geht, auch

$$\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}\,\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}_1\,\mathfrak{z}_1\,\mathfrak{t}'$$

eine Gruppe von acht associierten Punkten bilden. Es ist aber auch $\mathfrak{x}'$ der Gegenpunkt zu den fünf Punkten

$$\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{b}_1\,\mathfrak{c}_1\,\mathfrak{d}_1\,\mathfrak{x}$$

wegen der zweiten Gruppe von acht associierten Punkten, folglich müssen auch

$$\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{b}_1\,\mathfrak{c}_1\,\mathfrak{d}_1\,\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}_1\,\mathfrak{z}_1\,\mathfrak{t}'$$

eine Gruppe von acht associierten Punkten bilden; da nun auch

$$\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{b}_1\,\mathfrak{c}_1\,\mathfrak{d}_1\,\mathfrak{x}_1\,\mathfrak{y}_1\,\mathfrak{z}_1\,\mathfrak{t}_1$$

eine Gruppe von acht associierten Punkten bilden wegen der dritten Gruppe, so gehören $|\mathfrak{x}\mathfrak{t}'|$ und $|\mathfrak{x}_1\mathfrak{t}_1|$ derselben Regelschar eines durch die $C_I^{(4)}$ gehenden Hyperboloids an, und da die beiden Punkte $\mathfrak{x}\,\mathfrak{t}'$, in welchen diese Erzeugende der $C_I^{(4)}$ begegnet, mit $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}\,\mathfrak{y}_1\,\mathfrak{z}_1$ eine Gruppe von acht associierten Punkten bilden, so müssen auch die beiden Treffpunkte $\mathfrak{x}_1\,\mathfrak{t}_1$ der andern Erzeugenden derselben Regelschar mit $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}\mathfrak{y}_1\mathfrak{z}_1$ eine Gruppe von associierten Punkten

$$\mathfrak{x}_1\,\mathfrak{y}_1\,\mathfrak{z}_1\,\mathfrak{t}_1\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}$$

bilden, w. z. b. w.

Wir können also den Satz aussprechen:

Hat man auf einer $C_I^{(4)}$ zwei Gruppen von je acht associierten Punkten, und gehören vier Punkte der ersten Gruppe mit vier Punkten der zweiten Gruppe einer neuen Gruppe von acht associierten Punkten an, so müssen auch die übrigen vier Punkte der ersten Gruppe mit den übrigen vier Punkten der zweiten Gruppe eine neue Gruppe von acht associierten Punkten bilden.

Wir können nun die drei vorhergehenden Sätze in den einzigen zusammenziehen:

Hat man auf einer $C_I^{(4)}$ zwei Gruppen von je acht associierten Punkten, also 16 Punkte, und liegen acht beliebige von diesen Punkten derart, daß sie eine neue Gruppe von acht associierten Punkten bilden, so müssen auch die übrig bleibenden eine Gruppe von acht associierten Punkten bilden.

Als ein specieller Fall dieses Satzes folgt:
Schneiden drei Ebenen

α_1 die $C_I^{(4)}$ in den vier Punkten $\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{a}_3\,\mathfrak{a}_4$
β_1 „ „ „ „ „ „ $\mathfrak{b}_1\,\mathfrak{b}_2\,\mathfrak{b}_3\,\mathfrak{b}_4$
γ_1 „ „ „ „ „ „ $\mathfrak{c}_1\,\mathfrak{c}_2\,\mathfrak{c}_3\,\mathfrak{c}_4$,

und legt man die vier Ebenen

$$[\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{b}_1\,\mathfrak{c}_1] \quad [\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{b}_2\,\mathfrak{c}_2] \quad [\mathfrak{a}_3\,\mathfrak{b}_3\,\mathfrak{c}_3] \quad [\mathfrak{a}_4\,\mathfrak{b}_4\,\mathfrak{c}_4]$$

(wobei die Zuordnung ganz willkürlich ist), bestimmt endlich die vierten Schnittpunkte derselben mit der $C_I^{(4)}$

$$\mathfrak{d}_1 \quad \mathfrak{d}_2 \quad \mathfrak{d}_3 \quad \mathfrak{d}_4,$$

so bilden offenbar $\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{b}_1\,\mathfrak{c}_1\,\mathfrak{d}_1\,\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{b}_2\,\mathfrak{c}_2\,\mathfrak{d}_2$ eine Gruppe von acht associierten Punkten, $\mathfrak{a}_3\,\mathfrak{b}_3\,\mathfrak{c}_3\,\mathfrak{d}_3\,\mathfrak{a}_4\,\mathfrak{b}_4\,\mathfrak{c}_4\,\mathfrak{d}_4$ eine zweite Gruppe, $\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{b}_1\,\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{b}_2\,\mathfrak{a}_3\,\mathfrak{b}_3\,\mathfrak{a}_4\,\mathfrak{b}_4$ eine dritte Gruppe, weil auch sie in einem Ebenenpaare liegen, folglich müssen nach dem vorigen Satze $\mathfrak{c}_1\,\mathfrak{d}_1\,\mathfrak{c}_2\,\mathfrak{d}_2\,\mathfrak{c}_3\,\mathfrak{d}_3\,\mathfrak{c}_4\,\mathfrak{d}_4$ auch eine Gruppe von acht associierten Punkten bilden, und da $\mathfrak{c}_1\,\mathfrak{c}_2\,\mathfrak{c}_3\,\mathfrak{c}_4$ in einer Ebene liegen, so müssen auch

$$\mathfrak{d}_1\,\mathfrak{d}_2\,\mathfrak{d}_3\,\mathfrak{d}_4$$

in einer Ebene liegen. Also:

Begegnen drei Ebenen einer $C_I^{(4)}$ in je vier Punkten, und verbinden wir in irgend welcher Weise drei Punkte aus verschiedenen Ebenen durch vier neue Ebenen, die durch alle zwölf Punkte gehen, so liegen ihre vierten Treffpunkte mit der $C_I^{(4)}$ in einer und derselben neuen Ebene.

Lassen wir insbesondere $\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{b}_1\,\mathfrak{c}_1$ in einen einzigen Punkt $\mathfrak{a}_1$ zusammenrücken, so daß also $[\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{b}_1\,\mathfrak{c}_1]$ die Schmiegungsebene der $C_I^{(4)}$ im Punkte $\mathfrak{a}_1$ wird, ebenso $\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{b}_2\,\mathfrak{c}_2$ u. s. f., so folgt:

Schneidet eine Ebene α die $C_I^{(4)}$ in vier Punkten, so begegnen die vier Schmiegungsebenen in denselben der $C_I^{(4)}$ zum viertenmale in vier neuen Punkten, die wiederum in einer Ebene liegen.

Lassen wir dagegen $\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{a}_2 = \mathfrak{b}_2$, $\mathfrak{a}_3 = \mathfrak{b}_3$, $\mathfrak{a}_4 = \mathfrak{b}_4$ zusammenfallen, so folgt:

Zieht man in den vier Schnittpunkten einer Ebene mit der $C_I^{(4)}$ die vier Tangenten an derselben und legt durch jede Tangente eine Ebene, welche noch einen von den vier Schnittpunkten einer zweiten Transversalebene mit der $C_I^{(4)}$ enthält, so begegnen solche vier Ebenen der $C_I^{(4)}$ in vier neuen Punkten einer Ebene; läßt man statt aller vier Punkte nur einige derselben zusammenrücken, so ergeben sich andere specielle Sätze.

§ 8. **Punkt-Quadrupel auf der $C_I^{(4)}$, deren Tangenten hyperboloidische Lage haben.**

Wir haben gesehen (Seite 9), daß jede Erzeugende aus einer der beiden Regelscharen eines beliebigen durch die $C_I^{(4)}$ gelegten Hyperboloids $\mathfrak{H}^{(2)}$ der Raumkurve im allgemeinen in zwei Punkten begegnet; es entsteht die Frage, wann insbesondere die beiden Treffpunkte zusammenfallen, also die Erzeugende eine Tangente der $C_I^{(4)}$ wird.

Sei $|\mathfrak{A}\mathfrak{B}|$ eine beliebige Erzeugende des durch die $C_I^{(4)}$ gelegten Hyperboloids $\mathfrak{H}^{(2)}$, und begegne sie der $C_I^{(4)}$ in den Punkten $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, oder auch umgekehrt, sei $|\mathfrak{A}\mathfrak{B}|$ eine beliebige Sekante der $C_I^{(4)}$ und $\mathfrak{H}^{(2)}$ das einzige durch diese Sekante und die Raumkurve gelegte Hyperboloid $\mathfrak{H}^{(2)}$ (Seite 10), dann können wir von $\mathfrak{A}$ aus (oder von $\mathfrak{B}$) den mit der $C_I^{(4)}$ perspektiven Kegel $\mathfrak{A}^{(3)}$ dritter Ordnung durch dieselbe legen, von welchem $|\mathfrak{A}\mathfrak{B}|$ ein Kegelstrahl ist. Eine beliebige Transversalebene durchschneidet diesen Kegel in einer allgemeinen ebenen Kurve dritter Ordnung $\mathfrak{K}^{(3)}$, auf der der Treffpunkt $\mathfrak{p}$ des Strahles $|\mathfrak{A}\mathfrak{B}|$ mit der Transversalebene liegt, und aus $\mathfrak{p}$ gehen im allgemeinen vier Tangenten an die $\mathfrak{K}^{(3)}$ (außer der Tangente in $\mathfrak{p}$ selbst); diese vier Tangenten mit $\mathfrak{A}$ verbunden liefern vier Berührungsebenen des Kegels $\mathfrak{A}^{(3)}$, die durch den Kegelstrahl $|\mathfrak{A}\mathfrak{B}|$ gehen, und eine solche Berührungsebene muß der $C_I^{(4)}$ (außer in $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$) noch in zwei zusammenfallenden Punkten begegnen, also eine Tangente der $C_I^{(4)}$ enthalten. Da diese aber zugleich der zweiten Regelschar des Hyperboloids $\mathfrak{H}^{(2)}$ angehören muß, so schließen wir:

Eine beliebige Sekante der $C_I^{(4)}$ wird im allge-

meinen von vier Tangenten der Raumkurve getroffen (außer den beiden Tangenten in den Punkten, in welchen sie selbst der $C_I^{(4)}$ begegnet). Oder:

Durch eine beliebige Sekante einer $C_I^{(4)}$ gehen im allgemeinen vier Ebenen, welche dieselbe in einem weiteren Punkte berühren.

Die vier Berührungspunkte nennen wir ein „Punktquadrupel“ auf der $C_I^{(4)}$, also:

Ein Punktquadrupel auf der $C_I^{(4)}$ besitzt die Eigenschaft, daß die vier Tangenten der $C_I^{(4)}$ in diesen vier Punkten auf einem und demselben Hyperboloid liegen, welches durch die ganze $C_I^{(4)}$ geht.

Gehen wir umgekehrt von einem beliebigen durch die $C_I^{(4)}$ gelegten Hyperboloid aus und fassen ebenso, wie vorhin die Erzeugende $|\mathfrak{A}\mathfrak{B}|$ der einen Regelschar, eine beliebige Erzeugende der zweiten Regelschar des Hyperboloids auf, so folgt der Satz:

Die $C_I^{(4)}$ berührt auf einem beliebigen durch dieselbe gelegten Hyperboloid im allgemeinen vier Erzeugende der einen Regelschar und vier Erzeugende der andern Regelschar. Die Berührungspunkte bilden zwei zusammengehörige Punktquadrupel.

Bei zwei zusammengehörigen Punktquadrupeln gehören also immer die vier Tangenten der $C_I^{(4)}$ in den Punkten des einen Quadrupels der einen Regelschar und in den Punkten des andern Quadrupels der andern Regelschar eines und desselben durch die $C_I^{(4)}$ gehenden Hyperboloids an.

Aus dem bekannten Salmon'schen Satze, dafs das Tangentenquadrupel aus einem Punkte einer $\mathfrak{K}^{(3)}$ an dieselbe ein Strahlbüschel mit unveränderlichem Doppelverhältnis bildet, wenn der Mittelpunkt des Büschels sich auf der $\mathfrak{K}^{(3)}$ verändert (siehe Theorie d. Kurven 3. Ordn. Seite 68), folgt ein analoger Satz für die $C_I^{(4)}$:

Die vier Berührungsebenen, welche sich durch eine Sekante der $C_I^{(4)}$ an dieselbe legen lassen, behalten ein unveränderliches Doppelverhältnis, wenn die Sekante der Raumkurve sich beliebig ändert.

Da die vier Tangenten in den Punkten eines Quadrupels der $C_I^{(4)}$ vier Erzeugende einer Regelschar sind und eine Erzeugende der andern Regelschar in vier Punkten treffen, die dasselbe Doppelverhältnis besitzen, wie die vier Ebenen, welche die vier Tangenten mit der Erzeugenden der zweiten Regelschar verbinden, so können wir auch sagen:

Legt man durch eine Sekante der $C_I^{(4)}$ die vier Berührungsebenen an dieselbe, so treffen die vier Tangenten der $C_I^{(4)}$ in jenen Berührungspunkten die Sekante in vier Punkten, deren Doppelverhältnis konstant bleibt, wenn die Sekante der Raumkurve sich beliebig ändert.

Der bekannte Satz aus der Theorie der ebenen Kurven dritter Ordnung (a. a. O. S. 109):

„Legt man aus einem Punkte der ebenen Kurve $\mathfrak{K}^{(3)}$ das Tangentenquadrupel an dieselbe, so bilden die vier Berührungspunkte ein vollständiges Viereck, dessen drei Diagonalpunkte auf der $\mathfrak{K}^{(3)}$ liegen und denselben Tangentialpunkt haben, wie der ursprüngliche Punkt",

führt uns auf den Zusammenhang zwischen den acht Punkten oder zwei Punktquadrupeln, in denen die $C_I^{(4)}$ je vier Erzeugende aus der einen und der andern Regelschar eines durch die Raumkurve gelegten Hyperboloids $\mathfrak{H}^{(2)}$ berührt.

Nennen wir bei einem durch die $C_I^{(4)}$ gelegten Hyperboloid die vier Erzeugenden der einen Regelschar

$$t_1\, t_2\, t_3\, t_4\,,$$

welche die $C_I^{(4)}$ in den Punkten

$$\mathfrak{t}_1\, \mathfrak{t}_2\, \mathfrak{t}_3\, \mathfrak{t}_4$$

berühren, und die vier Erzeugenden der andern Regelschar

$$t_1'\, t_2'\, t_3'\, t_4'\,,$$

welche die $C_I^{(4)}$ in den Punkten

$$\mathfrak{t}_1'\, \mathfrak{t}_2'\, \mathfrak{t}_3'\, \mathfrak{t}_4'$$

berühren, und legen wir die drei Ebenen $[\mathfrak{t}_1 t_2]$ $[\mathfrak{t}_1 t_3]$ $[\mathfrak{t}_1 t_4]$, so müssen sich dieselben in einer Geraden schneiden, welche Erzeugende der zweiten Regelschar ist, zu der $t_1' t_2' t_3' t_4'$ gehören. Diese Gerade sei s_1; die Ebene $[s_1\, t_1]$ wird dann die

Schmiegungsebene der $C_I^{(4)}$ im Punkte $\mathfrak{t}_1$ sein (Seite 14). Legen wir andererseits aus $\mathfrak{t}_1$ den mit der $C_I^{(4)}$ perspektiven Kegel dritter Ordnung $\mathfrak{t}_1^{(3)}$, welcher offenbar t_1 zu einem Kegelstrahle hat, so ist die Berührungsebene längs desselben auch die Schmiegungsebene für $\mathfrak{t}_1$ (Seite 17), enthält also den Strahl s_1, und dieser muß der übrige Kegelstrahl sein, in welchem jene Berührungsebene den Kegel $\mathfrak{t}_1^{(3)}$ schneidet. Nun gehen durch den Kegelstrahl t_1 vier Berührungsebenen an den Kegel $\mathfrak{t}_1^{(3)}$

$$[t_1 t_1'] \quad [t_1 t_2'] \quad [t_1 t_3'] \quad [t_1 t_4'],$$

welche längs den vier Kegelstrahlen

$$|\mathfrak{t}_1 \mathfrak{t}_1'| \quad |\mathfrak{t}_1 \mathfrak{t}_2'| \quad |\mathfrak{t}_1 \mathfrak{t}_3'| \quad |\mathfrak{t}_1 \mathfrak{t}_4'|$$

berühren, und der obige Satz über die ebene $\mathfrak{K}^{(3)}$ zeigt uns, daß auch die drei Schnittlinien

$$|[\mathfrak{t}_1 \mathfrak{t}_1' \mathfrak{t}_2'],\ [\mathfrak{t}_1 \mathfrak{t}_3' \mathfrak{t}_4']|$$
$$|[\mathfrak{t}_1 \mathfrak{t}_1' \mathfrak{t}_3'],\ [\mathfrak{t}_1 \mathfrak{t}_2' \mathfrak{t}_4']|$$
$$|[\mathfrak{t}_1 \mathfrak{t}_1' \mathfrak{t}_4'],\ [\mathfrak{t}_1 \mathfrak{t}_2' \mathfrak{t}_3']|$$

drei neue Kegelstrahlen sein müssen, deren Tangentialebenen alle drei durch denselben Kegelstrahl gehen, in welchem die Tangentialebene längs t_1 zum andernmale den Kegel $\mathfrak{t}_1^{(3)}$ schneidet, d. h. durch s_1. Durch s_1 gehen aber außer der Schmiegungsebene $[s_1 t_1]$ nur noch die drei Berührungsebenen $[s_1 t_2]$ $[s_1 t_3]$ $[s_1 t_4]$ an die $C_I^{(4)}$, welche den Kegel $\mathfrak{t}_1^{(3)}$ längs den Strahlen $|\mathfrak{t}_1 \mathfrak{t}_2|$ $|\mathfrak{t}_1 \mathfrak{t}_3|$ $|\mathfrak{t}_1 \mathfrak{t}_4|$ berühren, also können die obigen drei Schnittlinien nichts anderes sein, als diese drei Strahlen, d. h.

$$|[\mathfrak{t}_1 \mathfrak{t}_1' \mathfrak{t}_2'],\ [\mathfrak{t}_1 \mathfrak{t}_3' \mathfrak{t}_4']| \equiv |\mathfrak{t}_1 \mathfrak{t}_2|,$$
$$|[\mathfrak{t}_1 \mathfrak{t}_1' \mathfrak{t}_3'],\ [\mathfrak{t}_1 \mathfrak{t}_2' \mathfrak{t}_4']| \equiv |\mathfrak{t}_1 \mathfrak{t}_3|,$$
$$|[\mathfrak{t}_1 \mathfrak{t}_1' \mathfrak{t}_4'],\ [\mathfrak{t}_1 \mathfrak{t}_2' \mathfrak{t}_3']| \equiv |\mathfrak{t}_1 \mathfrak{t}_4|,$$

also liegen von den acht Punkten der beiden zusammengehörenden Punktquadrupel folgende je vier in einer Ebene:

$$\mathfrak{t}_1\mathfrak{t}_2\mathfrak{t}_1'\mathfrak{t}_2',\ \mathfrak{t}_1\mathfrak{t}_2\mathfrak{t}_3'\mathfrak{t}_4',\ \mathfrak{t}_1\mathfrak{t}_3\mathfrak{t}_1'\mathfrak{t}_3',\ \mathfrak{t}_1\mathfrak{t}_3\mathfrak{t}_2'\mathfrak{t}_4',\ \mathfrak{t}_1\mathfrak{t}_4\mathfrak{t}_1'\mathfrak{t}_4',\ \mathfrak{t}_1\mathfrak{t}_4\mathfrak{t}_2'\mathfrak{t}_3'.$$

Dies sagt aus, daß eine Ebene, die zwei Punkte des einen Quadrupels mit einem Punkte des zweiten Quadrupels ver-

bindet, notwendig noch einen anderen Punkt des letzteren enthalten muß. Nehmen wir daher die Ebene $[t_2 t_3 t_1']$, so muß dieselbe entweder t_2' oder t_3' oder t_4' enthalten; t_2' kann sie nicht enthalten, weil sonst die Ebene $[t_2 t_2' t_1']$ sowohl t_1 als auch t_3 enthalten müßte, was nicht möglich ist; die Ebene $[t_2 t_3 t_1']$ kann ebensowenig t_3' enthalten, weil sonst die Ebene $[t_3 t_3' t_1']$ sowohl t_1 als auch t_2 enthalten müßte, was nicht möglich ist, also muß die Ebene $[t_2 t_3 t_1']$ den Punkt t_4' enthalten. Nehmen wir andererseits die Ebene $[t_2 t_3 t_2']$, so kann dieselbe aus ähnlichen Gründen weder t_1' noch t_4' enthalten, muß also t_3' enthalten. In gleicher Weise finden wir zusammen folgende sechs neue Ebenen, deren jede je vier Punkte, paarweise aus den beiden Punktquadrupeln entnommen, enthält:

$$t_2 t_3 t_1' t_4',\ t_2 t_3 t_2' t_3',\ t_2 t_4 t_1' t_3',\ t_2 t_4 t_2' t_4',\ t_3 t_4 t_1' t_2',\ t_3 t_4 t_3' t_4'.$$

Wir schließen also den Satz:

Die acht Punkte zweier zusammengehörigen Punktquadrupel, d. h. die zweimal vier Punkte, in denen eine $C_I^{(4)}$ je vier Erzeugende aus der einen und andern Regelschar eines durch dieselbe gelegten Hyperboloids berührt, liegen zu je vieren in zwölf Ebenen, deren jede zwei Punkte aus dem einen und zwei aus dem andern Punktquadrupel enthält.

Auch folgt hieraus unmittelbar, daß solche zwei zusammengehörige Punktquadrupel eine Gruppe von acht associierten Punkten bilden (Seite 40).

Da die drei Ebenen

$$[t_1 t_2 t_1' t_2']\ [t_1 t_3 t_1' t_3']\ [t_2 t_3 t_2' t_3']$$

sich in einem Punkte schneiden, durch welchen die drei Schnittlinien je zweier derselben laufen müssen, so folgt, daß die drei Strahlen

$$|t_1 t_1'|\quad |t_2 t_2'|\quad |t_3 t_3'|$$

durch einen Punkt gehen; da aus dem gleichen Grunde aber auch $|t_1 t_1'|$ $|t_2 t_2'|$ $|t_4 t_4'|$ durch einen Punkt gehen müssen, so sehen wir, daß alle vier Strahlen $|t_1 t_1'|$ $|t_2 t_2'|$ $|t_3 t_3'|$ $|t_4 t_4'|$ durch einen und denselben Punkt gehen. In gleicher Weise finden wir:



$\|\mathfrak{t}_1\mathfrak{t}_1'\|$	$\|\mathfrak{t}_2\mathfrak{t}_2'\|$	$\|\mathfrak{t}_3\mathfrak{t}_3'\|$	$\|\mathfrak{t}_4\mathfrak{t}_4'\|$	gehen	durch	einen	und	dens.	Punkt	$\mathfrak{D}_1$,
$\|\mathfrak{t}_1\mathfrak{t}_2'\|$	$\|\mathfrak{t}_2\mathfrak{t}_1'\|$	$\|\mathfrak{t}_3\mathfrak{t}_4'\|$	$\|\mathfrak{t}_4\mathfrak{t}_3'\|$	„	„	„	„	„	„	$\mathfrak{D}_2$,
$\|\mathfrak{t}_1\mathfrak{t}_3'\|$	$\|\mathfrak{t}_2\mathfrak{t}_4'\|$	$\|\mathfrak{t}_3\mathfrak{t}_1'\|$	$\|\mathfrak{t}_4\mathfrak{t}_2'\|$	„	„	„	„	„	„	$\mathfrak{D}_3$,
$\|\mathfrak{t}_1\mathfrak{t}_4'\|$	$\|\mathfrak{t}_2\mathfrak{t}_3'\|$	$\|\mathfrak{t}_3\mathfrak{t}_2'\|$	$\|\mathfrak{t}_4\mathfrak{t}_1'\|$	„	„	„	„	„	„	$\mathfrak{D}_4$.

Wir sehen hieraus:

Die beiden zusammengehörigen Punktquadrupel der $C_I^{(4)}$ bilden zwei Tetraëder, die auf vierfache Weise gleichzeitig perspektiv liegen, und die vier Perspektivitätscentra bilden selbst ein drittes Tetraëder, welches mit jedem der beiden ersten Tetraëder vierfach-perspektive Lage hat, indem die Ecken des andern die Perspektivitätscentra sind.

Diese drei Tetraëder haben also die bekannte desmische Lage.*

Die Punkte $\mathfrak{D}_1\mathfrak{D}_2\mathfrak{D}_3\mathfrak{D}_4$ im Raume, welche wir auf diese Weise gefunden haben, stehen in einer ausgezeichneten Beziehung zur $C_I^{(4)}$ und sind unabhängig von dem durch sie gelegten Hyperboloid $\mathfrak{H}^{(2)}$. Betrachten wir nämlich die in $\mathfrak{D}_1$ sich treffenden vier Strahlen $|\mathfrak{t}_1\mathfrak{t}_1'|$ $|\mathfrak{t}_2\mathfrak{t}_2'|$ $|\mathfrak{t}_3\mathfrak{t}_3'|$ $|\mathfrak{t}_4\mathfrak{t}_4'|$ und bemerken, daß die beiden Tangenten t_1t_1' selbst sich begegnen müssen, weil sie den verschiedenen Regelscharen eines Hyperboloids angehören, so können wir von $\mathfrak{D}_1$ aus einen Kegel zweiter Ordnung $\mathfrak{D}_1^{(2)}$ legen, der durch diese vier Strahlen geht und längs des Strahles $|\mathfrak{t}_1\mathfrak{t}_1'|$ die Ebene $[t_1t_1']$ zur Berührungsebene hat, wodurch dieser Kegel $\mathfrak{D}_1^{(2)}$ gerade bestimmt wird. Er hat aber, wie wir sehen, zehn Punkte mit der Raumkurve $C_I^{(4)}$ gemein, nämlich außer den beiden doppelt zu zählenden Punkten $\mathfrak{t}_1\mathfrak{t}_1'$ noch die übrigen sechs Punkte der beiden Punktquadrupel, folglich muß der Kegel $\mathfrak{D}_1^{(2)}$ durch die ganze Raumkurve $C_I^{(4)}$ gehen; in gleicher Weise erhalten wir drei andere Kegel $\mathfrak{D}_2^{(2)}\mathfrak{D}_3^{(2)}\mathfrak{D}_4^{(2)}$, welche durch die ganze $C_I^{(4)}$ gehen. Wir haben also das Resultat gewonnen:

* C. Stephanos, Sur les systèmes desmiques de trois tétraèdres (Bulletin des Sciences mathématiques 2e série tome III, 1879, S. 424).

H. Schroeter, Über eine Raumkurve vierter Ordnung und erster Species (Kronecker's Journal für Math. Bd. 93, S. 169).

Die Punkte $\mathfrak{O}_1\mathfrak{O}_2\mathfrak{O}_3\mathfrak{O}_4$ sind die Mittelpunkte von vier Kegeln zweiter Ordnung, welche durch die ganze Raumkurve $C_I^{(4)}$ gehen.

Die Beziehung des Tetraëders $\mathfrak{O}_1\mathfrak{O}_2\mathfrak{O}_3\mathfrak{O}_4$ zu einer beliebigen durch die $C_I^{(4)}$ gelegten $F^{(2)}$ tritt unmittelbar hervor, wenn wir bemerken, daß die vier durch $\mathfrak{O}_1$ gehenden Strahlen $|\mathfrak{t}_1\mathfrak{t}_1'|$ $|\mathfrak{t}_2\mathfrak{t}_2'|$ $|\mathfrak{t}_3\mathfrak{t}_3'|$ $|\mathfrak{t}_4\mathfrak{t}_4'|$ der $C_I^{(4)}$, also auch der durch dieselbe gelegten $F^{(2)}$ in vier Punktepaaren begegnen, und daß rücksichtlich derselben die zu $\mathfrak{O}_1$ zugeordneten vierten harmonischen Punkte in der Polarebene des Punktes $\mathfrak{O}_1$ in Bezug auf die $F^{(2)}$ enthalten sein müssen. Diese Polarebene enthält aber auch die Schnittpunkte

$$(\mathfrak{t}_1\mathfrak{t}_2', \mathfrak{t}_2\mathfrak{t}_1') = \mathfrak{O}_2, \quad (\mathfrak{t}_1\mathfrak{t}_3', \mathfrak{t}_3\mathfrak{t}_1') = \mathfrak{O}_3, \quad (\mathfrak{t}_1\mathfrak{t}_4', \mathfrak{t}_4\mathfrak{t}_1') = \mathfrak{O}_4;$$

sie ist also die Ebene $[\mathfrak{O}_2\mathfrak{O}_3\mathfrak{O}_4]$ selbst, und dasselbe gilt für jede Ecke und die gegenüberliegende Seitenfläche des Tetraëders $\mathfrak{O}_1\mathfrak{O}_2\mathfrak{O}_3\mathfrak{O}_4$, also:

Das Tetraëder $\mathfrak{O}_1\mathfrak{O}_2\mathfrak{O}_3\mathfrak{O}_4$ ist ein gemeinschaftliches Polartetraëder für das Büschel sämtlicher $F^{(2)}$, die durch die $C_I^{(4)}$ gelegt werden können.

Gehen wir zu dem anfänglichen Hyperboloid $\mathfrak{H}^{(2)}$ zurück, bei welchem $t_1t_2t_3t_4$ der einen und $t_1't_2't_3't_4'$ der andern Regelschar angehörten, so sehen wir, daß die Ebene $[t_1t_1']$ eine Berührungsebene desselben ist, welche den Punkt (t_1t_1') zum Berührungspunkte hat, und da $\mathfrak{O}_1$ in der Ebene $[t_1t_1']$ liegt, so muß der Punkt (t_1t_1') in der Polarebene des Punktes $\mathfrak{O}_1$ liegen, welche $[\mathfrak{O}_2\mathfrak{O}_3\mathfrak{O}_4]$ ist; in gleicher Weise erkennen wir, daß die vier Punkte

(t_1t_1') (t_2t_2') (t_3t_3') (t_4t_4') in der Ebene $[\mathfrak{O}_2\mathfrak{O}_3\mathfrak{O}_4] = \varpi_1$,
(t_1t_2') (t_2t_1') (t_3t_4') (t_4t_3') „ „ „ $[\mathfrak{O}_1\mathfrak{O}_3\mathfrak{O}_4] = \varpi_2$,
(t_1t_3') (t_2t_4') (t_3t_1') (t_4t_2') „ „ „ $[\mathfrak{O}_1\mathfrak{O}_2\mathfrak{O}_4] = \varpi_3$,
(t_1t_4') (t_2t_3') (t_3t_2') (t_4t_1') „ „ „ $[\mathfrak{O}_1\mathfrak{O}_2\mathfrak{O}_3] = \varpi_4$

liegen müssen.

Zwei beliebig gegebene Flächen $F_1^{(2)}$ und $F_2^{(2)}$, als deren Schnittkurve die $C_I^{(4)}$ auftritt, können im allgemeinen nicht mehr als ein einziges gemeinsames Polartetraëder haben;



denn ist das gefundene $\mathfrak{O}_1\mathfrak{O}_2\mathfrak{O}_3\mathfrak{O}_4$ ein solches, dessen gegenüberliegende Seitenflächen $\varpi_1\varpi_2\varpi_3\varpi_4$ die Polarebenen der Gegenecken in Bezug auf beide Flächen $F_1^{(2)}$ und $F_2^{(2)}$ sind, und gäbe es außer $\mathfrak{O}_1$ und seiner Polarebene ϖ_1 noch einen andern nicht in der Ebene ϖ_1 liegenden Punkt $\mathfrak{O}_1'$, für den ebenfalls die Polarebenen in Bezug auf beide Flächen $F_1^{(2)}$ und $F_2^{(2)}$ in eine Ebene ϖ_1' zusammenfielen, so müßte jede durch $|\mathfrak{O}_1\mathfrak{O}_1'|$ gelegte Ebene ε die $F_1^{(2)}$ und $F_2^{(2)}$ in zwei Kegelschnitten durchschneiden, für welche sowohl $\mathfrak{O}_1$ und $|\varpi_1\varepsilon|$, als auch $\mathfrak{O}_1'$ und $|\varpi_1'\varepsilon|$ Pol und Polare wären. Da aber $\mathfrak{O}_1'$ nicht in der Ebene ϖ_1 liegt, also auch nicht in der Schnittlinie $|\varpi_1\varepsilon|$, so müßten die beiden Kegelschnitte zwei verschiedene gemeinsame Polardreiecke haben, die keine Ecke und Gegenseite gemeinschaftlich hätten, was widersinnig ist. Wir schließen also:

*Es giebt im allgemeinen nur ein einziges gemeinsames Polartetraëder $\mathfrak{O}_1\mathfrak{O}_2\mathfrak{O}_3\mathfrak{O}_4$ für sämtliche Flächen $F^{(2)}$ des Büschels, welche durch eine gegebene $C_I^{(4)}$ gehen, und die vier Ecken dieses gemeinsamen Polartetraëders sind die Mittelpunkte von vier Kegeln zweiter Ordnung, die sich durch die ganze $C_I^{(4)}$ legen lassen; es giebt also im allgemeinen auch nur vier solche Kegel.**

Es läßt sich auch umgekehrt einsehen, daß jede Ecke des gemeinsamen Polartetraëders Mittelpunkt eines Kegels zweiter Ordnung sein muß, der durch die ganze $C_I^{(4)}$ geht. Denn sei $\mathfrak{O}_1$ ein solcher Punkt, dessen Polarebenen in Bezug auf zwei durch die $C_I^{(4)}$ gelegte $F_1^{(2)}$ und $F_2^{(2)}$ zusammenfallen in die Ebene ϖ_1, so wird ein Strahl, der $\mathfrak{O}_1$ mit einem Punkte $\mathfrak{p}$ der $C_I^{(4)}$ verbindet, der Ebene ϖ_1 in einem Punkte $\mathfrak{s}$ begegnen, so daß der vierte harmonische zu $\mathfrak{p}$ zugeordnete Punkt $\mathfrak{p}'$ (wo $(\mathfrak{O}_1\mathfrak{s}\mathfrak{p}\mathfrak{p}') = -1$ ist) notwendig auch auf der $C_I^{(4)}$ liegt; also jeder durch $\mathfrak{O}_1$ gezogene Strahl nach einem Punkte $\mathfrak{p}$ der $C_I^{(4)}$ hin muß ihr noch in einem zweiten Punkte $\mathfrak{p}'$

---

* Poncelet, traité des propriétés projectives des figures. Paris, 1822, pag. 392.

begegnen. Durch die Sekante $|\mathfrak{p}\mathfrak{p}'|$ geht aber nur ein einziges bestimmtes Hyperboloid $\mathfrak{H}^{(2)}$, welches die ganze Raumkurve enthält, und eine beliebige durch $|\mathfrak{p}\mathfrak{p}'|$ gelegte Ebene ε begegnet der $C_I^{(4)}$ noch in zwei weiteren Punkten $\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_1'$, deren Verbindungslinie eine Erzeugende der zweiten Regelschar des Hyperboloids ist. Da nun die Ebene $[\mathfrak{p}\mathfrak{p}'\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_1']$ durch $\mathfrak{O}_1$ geht, weil $\mathfrak{O}_1$ auf $|\mathfrak{p}\mathfrak{p}'|$ liegt, und da der Strahl $|\mathfrak{O}_1\mathfrak{p}_1|$ noch in einem zweiten Punkte $\mathfrak{p}_1'$ der $C_I^{(4)}$ begegnen muß, so ist $(\mathfrak{p}\mathfrak{p}', \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_1') = \mathfrak{O}_1$, d. h. eine Erzeugende der zweiten Regelschar begegnet einer der ersten in $\mathfrak{O}_1$, und da dies für alle Erzeugenden der zweiten Regelschar gilt, so laufen alle durch denselben Punkt, d. h. das Hyperboloid $\mathfrak{H}^{(2)}$ artet in den Kegel $\mathfrak{O}_1^{(2)}$ aus.

Da es nur ein Polartetraëder giebt, so muß dasselbe unabhängig sein von der Konstruktion vermittelst zweier zusammengehöriger Punktquadrupel, durch welche wir zu dem Polartetraëder gelangten, d. h. wie wir auch das Hyperboloid $\mathfrak{H}^{(2)}$ durch die $C_I^{(4)}$ legen, wir gelangen immer durch die angegebene Verbindung der Punkte des Quadrupels zu einem und demselben Polartetraëder.

§ 9. Einige Eigenschaften von Punktquadrupeln der $C_I^{(4)}$ im Zusammenhange mit dem gemeinsamen Polartetraëder des Büschels, dessen Grundkurve $C_I^{(4)}$ ist.

Nach Ermittelung des gemeinsamen Polartetraëders für sämtliche Flächen $F^{(2)}$ des Büschels, dessen Grundkurve $C_I^{(4)}$ ist, können wir nun umgekehrt aus dem einzigen Polartetraëder $\mathfrak{O}_1\mathfrak{O}_2\mathfrak{O}_3\mathfrak{O}_4$ unendlich viele Punktquadrupel auf der $C_I^{(4)}$ ableiten und deren Zusammenhang erkennen. Da die vier Strahlen

$$|\mathfrak{t}_1\mathfrak{O}_1| \quad |\mathfrak{t}_1\mathfrak{O}_2| \quad |\mathfrak{t}_1\mathfrak{O}_3| \quad |\mathfrak{t}_1\mathfrak{O}_4|,$$

wie wir gesehen haben (Seite 51), der $C_I^{(4)}$ in den vier neuen Punkten

$$\mathfrak{t}_1' \quad \mathfrak{t}_2' \quad \mathfrak{t}_3' \quad \mathfrak{t}_4'$$

begegnen, die ein Punktquadrupel bilden, so folgt:

Verbindet man irgend einen Punkt der $C_I^{(4)}$ mit den vier Ecken des Polartetraëders, so erhält man

vier Strahlen, die der $C_I^{(4)}$ allemal in vier neuen Punkten begegnen, die ein Punktquadrupel bilden.

Da ferner die beiden Strahlen

$$|\mathfrak{t}_1\mathfrak{D}_1\mathfrak{t}_1'| \quad \text{und} \quad |\mathfrak{t}_2\mathfrak{D}_2\mathfrak{t}_1'|$$

in einer Ebene liegen, weil sie den Punkt $\mathfrak{t}_1'$ gemein haben, so muß der Strahl $|\mathfrak{t}_1\mathfrak{t}_2|$ der Kante $|\mathfrak{D}_1\mathfrak{D}_2|$ des Polartetraëders begegnen. Aus den beiden Strahlen

$$|\mathfrak{t}_1\mathfrak{D}_3\mathfrak{t}_3'| \quad \text{und} \quad |\mathfrak{t}_2\mathfrak{D}_4\mathfrak{t}_3'|,$$

die in einer Ebene liegen, weil sie den Punkt $\mathfrak{t}_3'$ gemein haben, folgt, daß $|\mathfrak{t}_1\mathfrak{t}_2|$ und $|\mathfrak{D}_3\mathfrak{D}_4|$ sich treffen müssen; $|\mathfrak{t}_1\mathfrak{t}_2|$ ist also eine Gerade, die den beiden Gegenkanten $|\mathfrak{D}_1\mathfrak{D}_2|$ und $|\mathfrak{D}_3\mathfrak{D}_4|$ des Polartetraëders begegnet; in gleicher Weise sehen wir, daß auch $|\mathfrak{t}_1\mathfrak{t}_3|$ den beiden Gegenkanten $|\mathfrak{D}_1\mathfrak{D}_3|$ und $|\mathfrak{D}_2\mathfrak{D}_4|$ des Polartetraëders, und endlich, daß $|\mathfrak{t}_1\mathfrak{t}_4|$ dem dritten Paare von Gegenkanten $|\mathfrak{D}_1\mathfrak{D}_4|$ und $|\mathfrak{D}_2\mathfrak{D}_3|$ des Polartetraëders begegnet. Wir schließen also:

Zieht man aus einem beliebigen Punkte $\mathfrak{t}_1$ der $C_I^{(4)}$ die drei Geraden, welche je einem Paare Gegenkanten des Polartetraëders begegnen, so treffen dieselben die $C_I^{(4)}$ in drei neuen Punkten $\mathfrak{t}_2\mathfrak{t}_3\mathfrak{t}_4$, die mit $\mathfrak{t}_1$ zusammen ein Punktquadrupel der $C_I^{(4)}$ bilden.

Wir sehen hieraus, wie zu einer Ecke eines Punktquadrupels, welche beliebig auf der $C_I^{(4)}$ gewählt werden darf, die drei übrigen dazu gehörigen bestimmt werden können. Zugleich befinden sich die beiden Tetraëder

$$\mathfrak{t}_1\mathfrak{t}_2\mathfrak{t}_3\mathfrak{t}_4 \quad \text{und} \quad \mathfrak{D}_1\mathfrak{D}_2\mathfrak{D}_3\mathfrak{D}_4$$

in der eigentümlichen Lage, daß das Paar Gegenkanten

$|\mathfrak{t}_1\mathfrak{t}_2|$	und	$|\mathfrak{t}_3\mathfrak{t}_4|$	den Gegenkanten	$|\mathfrak{D}_1\mathfrak{D}_2|$	und	$|\mathfrak{D}_3\mathfrak{D}_4|$,
$|\mathfrak{t}_1\mathfrak{t}_3|$	„	$|\mathfrak{t}_2\mathfrak{t}_4|$	„ „	$|\mathfrak{D}_1\mathfrak{D}_3|$	„	$|\mathfrak{D}_2\mathfrak{D}_4|$,
$|\mathfrak{t}_1\mathfrak{t}_4|$	„	$|\mathfrak{t}_2\mathfrak{t}_3|$	„ „	$|\mathfrak{D}_1\mathfrak{D}_4|$	„	$|\mathfrak{D}_2\mathfrak{D}_3|$,

begegnet; eine solche gegenseitige Lage kann man „angeschriebene“ Lage zweier Tetraëder nennen. Wir können also den Satz aussprechen:



Ein beliebiges Punktquadrupel der $C_I^{(4)}$ hat zu dem Polartetraëder $\mathfrak{O}_1\mathfrak{O}_2\mathfrak{O}_3\mathfrak{O}_4$ immer eine solche Lage, daß jedes Paar Gegenkanten des Punktquadrupels einem Paar Gegenkanten des Polartetraëders begegnet.

Ziehen wir von einem beliebigen Punkte $\mathfrak{B}$ der $C_I^{(4)}$ die vier Strahlen $|\mathfrak{B}\mathfrak{O}_1|$ $|\mathfrak{B}\mathfrak{O}_2|$ $|\mathfrak{B}\mathfrak{O}_3|$ $|\mathfrak{B}\mathfrak{O}_4|$, so begegnen dieselben der $C_I^{(4)}$ in vier weiteren Punkten $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4$, die ein Punktquadrupel bilden (S. 55); nehmen wir dann einen beliebigen zweiten Punkt $\mathfrak{B}'$ der $C_I^{(4)}$, so treffen die Strahlen $|\mathfrak{B}'\mathfrak{O}_1|$ $|\mathfrak{B}'\mathfrak{O}_2|$ $|\mathfrak{B}'\mathfrak{O}_3|$ $|\mathfrak{B}'\mathfrak{O}_4|$ die $C_I^{(4)}$ ebenfalls in vier weiteren Punkten $\mathfrak{A}_1'\mathfrak{A}_2'\mathfrak{A}_3'\mathfrak{A}_4'$, die ein neues Punktquadrupel bilden; da aber die fünf Punkte $\mathfrak{O}_1\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{A}_1\,\mathfrak{B}'\,\mathfrak{A}_1'$ auf zwei durch $\mathfrak{O}_1$ gehenden Strahlen, also in einer Ebene liegen, so muß auch $|\mathfrak{B}\mathfrak{B}'|$ dem Strahle $|\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_1'|$ begegnen, ebenso den Strahlen $|\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_2'|$, $|\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_3'|$ und $|\mathfrak{A}_4\mathfrak{A}_4'|$; wir erhalten also den Satz:

Wenn man eine beliebige Sekante der $C_I^{(4)}$ mit den vier Punkten eines Punktquadrupels derselben durch vier Ebenen verbindet, so begegnen dieselben der Raumkurve in vier neuen Punkten, die wiederum ein Punktquadrupel bilden.

Wir können hiernach aus einem Punktquadrupel der $C_I^{(4)}$ unendlich viele weitere ableiten.

Aus dem Zusammenhange der beiden Punktquadrupel $\mathfrak{t}_1\mathfrak{t}_2\mathfrak{t}_3\mathfrak{t}_4$ und $\mathfrak{t}_1'\mathfrak{t}_2'\mathfrak{t}_3'\mathfrak{t}_4'$, in welchen die $C_I^{(4)}$ je vier Erzeugende aus jeder der beiden Regelscharen eines durch die $C_I^{(4)}$ gelegten Hyperboloids berührt, folgt, da die vier Punkte $\mathfrak{t}_1\mathfrak{t}_2\mathfrak{t}_1'\mathfrak{t}_2'$ in einer Ebene liegen, daß das einzige durch die Sekante $|\mathfrak{t}_1\mathfrak{t}_2|$ und die Raumkurve gelegte Hyperboloid auch $|\mathfrak{t}_1'\mathfrak{t}_2'|$ zu einer Erzeugenden ihrer zweiten Regelschar haben muß; das durch $|\mathfrak{t}_1'\mathfrak{t}_2'|$ und die $C_I^{(4)}$ gelegte Hyperboloid, welches mit dem vorigen identisch sein muß, hat nun, weil $\mathfrak{t}_1'\mathfrak{t}_2'\mathfrak{t}_3\mathfrak{t}_4$ in einer Ebene liegen, auch die Gerade $|\mathfrak{t}_3\mathfrak{t}_4|$ zur Erzeugenden der andern Regelschar, zu welcher $|\mathfrak{t}_1'\mathfrak{t}_2'|$ nicht gehört, also müssen

$$|\mathfrak{t}_1\mathfrak{t}_2| \quad \text{und} \quad |\mathfrak{t}_3\mathfrak{t}_4|$$

einer und derselben Regelschar eines durch die $C_I^{(4)}$ gehenden Hyperboloids angehören.

Bezeichnen wir nun die vierten Schnittpunkte der $C_I^{(4)}$ mit den Ebenen

$$[\mathfrak{t}_2\mathfrak{t}_3\mathfrak{t}_4] \quad \text{durch} \quad \mathfrak{T}_1,$$
$$[\mathfrak{t}_1\mathfrak{t}_3\mathfrak{t}_4] \quad \text{„} \quad \mathfrak{T}_2,$$
$$[\mathfrak{t}_1\mathfrak{t}_2\mathfrak{t}_4] \quad \text{„} \quad \mathfrak{T}_3,$$
$$[\mathfrak{t}_1\mathfrak{t}_2\mathfrak{t}_3] \quad \text{„} \quad \mathfrak{T}_4,$$

so erkennen wir, daß die beiden in $\mathfrak{t}_1$ sich kreuzenden Erzeugenden aus verschiedenen Regelscharen des Hyperboloids

$$|\mathfrak{t}_1\mathfrak{t}_2| \quad \text{und} \quad |\mathfrak{t}_1\mathfrak{T}_2|,$$

die beiden in $\mathfrak{t}_2$ sich kreuzenden Erzeugenden aus verschiedenen Regelscharen des Hyperboloids

$$|\mathfrak{t}_2\mathfrak{t}_1| \quad \text{und} \quad |\mathfrak{t}_2\mathfrak{T}_1|$$

sind; die Ebenen $[\mathfrak{t}_1\mathfrak{t}_2\mathfrak{T}_2]$ und $[\mathfrak{t}_2\mathfrak{t}_1\mathfrak{T}_1]$ sind also Berührungsebenen des Hyperboloids in den Punkten $\mathfrak{t}_1$ und $\mathfrak{t}_2$, enthalten mithin die Tangenten t_1 und t_2 der $C_I^{(4)}$ in diesen Punkten, d. h. ihre vierten Schnittpunkte mit der $C_I^{(4)}$ sind die Punkte $\mathfrak{t}_1$ und $\mathfrak{t}_2$ selbst. Wir erhalten also die Ebenen

$$[\mathfrak{t}_1\mathfrak{t}_1\mathfrak{t}_2\mathfrak{T}_2] \quad [\mathfrak{t}_2\mathfrak{t}_2\mathfrak{t}_1\mathfrak{T}_1]$$

und haben ferner die Ebenen

$$[\mathfrak{t}_1\mathfrak{t}_2\mathfrak{t}_3\mathfrak{T}_4] \quad [\mathfrak{t}_1\mathfrak{t}_2\mathfrak{t}_4\mathfrak{T}_3];$$

diese vier Ebenen gehen durch die gemeinsame Sekante $|\mathfrak{t}_1\mathfrak{t}_2|$ und einzeln durch die vier Punkte $\mathfrak{t}_1\,\mathfrak{t}_2\,\mathfrak{t}_3\,\mathfrak{t}_4$ eines Punktquadrupels; sie treffen zum viertenmale die $C_I^{(4)}$ in $\mathfrak{T}_2\mathfrak{T}_1\mathfrak{T}_4\mathfrak{T}_3$, vier neuen Punkten, die nach dem obigen Satze (Seite 57) ein Punktquadrupel bilden müssen, also:

Die vier Seitenflächen eines Tetraëders, dessen Ecken ein Punktquadrupel der $C_I^{(4)}$ bilden, begegnen derselben in vier neuen Punkten, die wiederum ein Punktquadrupel der $C_I^{(4)}$ bilden.

Auch dieser Satz gestattet eine Fortsetzung, die von einem Punktquadrupel zu einer unbegrenzten Anzahl weiterer führt.

Da wir gesehen haben (Seite 57), daß

$$|\mathfrak{t}_1\mathfrak{t}_2| \quad \text{und} \quad |\mathfrak{t}_3\mathfrak{t}_4|,$$

d. h. ein Paar Gegenkanten eines Tetraëders, dessen Ecken ein Punktquadrupel der $C_I^{(4)}$ bilden, notwendig zwei Erzeugende derselben Regelschar eines durch die ganze $C_I^{(4)}$ gehenden Hyperboloids sind, und jede durch $|\mathfrak{t}_1\mathfrak{t}_2|$ gelegte Ebene der $C_I^{(4)}$ in zwei weiteren Punkten $\mathfrak{S}\mathfrak{S}'$ begegnet, deren Verbindungslinie $|\mathfrak{S}\mathfrak{S}'|$ eine Erzeugende der zweiten Regelschar des Hyperboloids sein, also der Erzeugenden $|\mathfrak{t}_3\mathfrak{t}_4|$ der ersten Regelschar begegnen muß, so folgt:

Wenn man von einem beliebigen Punkte $\mathfrak{S}$ der $C_I^{(4)}$ diejenige Gerade zieht, welche einem Paar Gegenkanten des von einem Punktquadrupel gebildeten Tetraëders begegnet, so wird diese Gerade allemal der $C_I^{(4)}$ noch in einem zweiten Punkte $\mathfrak{S}'$ begegnen, d. h. eine Sekante der $C_I^{(4)}$ sein. Oder:

Die drei Paar Gegenkanten eines Tetraëders, dessen Ecken ein Punktquadrupel bilden, besitzen die Eigenschaft, daß jede Sekante der $C_I^{(4)}$, die eine Kante des Tetraëders trifft, auch der Gegenkante desselben begegnen muß.

Projicieren wir wieder von einem beliebigen Punkte $\mathfrak{B}$ der $C_I^{(4)}$ die Ecken des Polartetraëders $\mathfrak{O}_1\mathfrak{O}_2\mathfrak{O}_3\mathfrak{O}_4$ (oder was dasselbe sagt, die Mittelpunkte der vier durch die $C_I^{(4)}$ gehenden Kegel zweiter Ordnung) auf die Raumkurve, so erhalten wir ein Punktquadrupel $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4$; machen wir dasselbe von einem zweiten Punkte $\mathfrak{B}'$ der $C_I^{(4)}$ aus, so erhalten wir ein zweites Punktquadrupel $\mathfrak{A}_1'\mathfrak{A}_2'\mathfrak{A}_3'\mathfrak{A}_4'$; da die beiden Strahlen

$$|\mathfrak{B}\mathfrak{O}_1\mathfrak{A}_1| \quad \text{und} \quad |\mathfrak{B}'\mathfrak{O}_1\mathfrak{A}_1'|$$

sich in $\mathfrak{O}_1$ schneiden, so muß auch $|\mathfrak{B}\mathfrak{B}'|$ dem Strahle $|\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_1'|$ und ebenso $|\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_2'|$, $|\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_3'|$, $|\mathfrak{A}_4\mathfrak{A}_4'|$ begegnen. Das Hyperboloid, welches durch $|\mathfrak{B}\mathfrak{B}'|$ und die Raumkurve gelegt werden kann, muß daher

$$|\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_1'| \quad |\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_2'| \quad |\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_3'| \quad |\mathfrak{A}_4\mathfrak{A}_4'|$$

zu Erzeugenden einer und derselben Regelschar haben. Wir können aber zu dem Punktquadrupel $\mathfrak{A}_1'\mathfrak{A}_2'\mathfrak{A}_3'\mathfrak{A}_4'$ auch auf die Art gelangen, daß wir $|\mathfrak{A}_1'\mathfrak{O}_2|$ ziehen, welcher Strahl der

$C_I^{(4)}$ zum andernmale in $\mathfrak{B}''$ begegnen möge, dann werden die Strahlen

$$|\mathfrak{B}''\mathfrak{O}_1| \quad |\mathfrak{B}''\mathfrak{O}_3| \quad |\mathfrak{B}''\mathfrak{O}_4|$$

zum andernmale der $C_I^{(4)}$ in den drei übrigen Punkten

$$\mathfrak{A}_2' \quad \mathfrak{A}_4' \quad \mathfrak{A}_3'$$

des zu $\mathfrak{A}_1'$ gehörenden Punktquadrupels begegnen, folglich muß, da $|\mathfrak{O}_2\mathfrak{B}\mathfrak{A}_2|$ und $|\mathfrak{O}_2\mathfrak{B}''\mathfrak{A}_1'|$ sich in $\mathfrak{O}_2$ treffen, auch $|\mathfrak{B}\mathfrak{B}''|$ dem Strahle $|\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_1'|$ begegnen; und aus gleichem Grunde muß $|\mathfrak{B}\mathfrak{B}''|$ den drei Strahlen $|\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2'|$, $|\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4'|$, $|\mathfrak{A}_4\mathfrak{A}_3'|$ begegnen. Hieraus folgt, daß auch

$$|\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2'| \quad |\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_1'| \quad |\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4'| \quad |\mathfrak{A}_4\mathfrak{A}_3'|$$

einer und derselben Regelschar des durch $|\mathfrak{B}\mathfrak{B}''|$ und die Raumkurve gelegten Hyperboloids angehören. Fahren wir so fort zu schließen, so ergiebt sich der Satz:

Sind $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4$ und $\mathfrak{A}_1'\mathfrak{A}_2'\mathfrak{A}_3'\mathfrak{A}_4'$ zwei beliebige Punktquadrupel der Raumkurve, so gehören

$\lvert\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_1'\rvert$	$\lvert\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_2'\rvert$	$\lvert\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_3'\rvert$	$\lvert\mathfrak{A}_4\mathfrak{A}_4'\rvert$	einer Regelschar an,
$\lvert\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2'\rvert$	$\lvert\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_1'\rvert$	$\lvert\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4'\rvert$	$\lvert\mathfrak{A}_4\mathfrak{A}_3'\rvert$	" " ",
$\lvert\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_3'\rvert$	$\lvert\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_4'\rvert$	$\lvert\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_1'\rvert$	$\lvert\mathfrak{A}_4\mathfrak{A}_2'\rvert$	" " ",
$\lvert\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_4'\rvert$	$\lvert\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3'\rvert$	$\lvert\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_2'\rvert$	$\lvert\mathfrak{A}_4\mathfrak{A}_1'\rvert$	" " ";

die beiden aus den Punktquadrupeln gebildeten Tetraëder haben also auf vierfache Weise hyperboloidische Lage, und alle vier dadurch erhaltenen Hyperboloide gehen durch die ganze $C_I^{(4)}$.

Da ein Paar Gegenkanten des aus einem Punktquadrupel $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4$ gebildeten Tetraëders

$$|\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2| \quad \text{und} \quad |\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4|$$

immer zwei Erzeugende derselben Regelschar eines durch die $C_I^{(4)}$ gelegten Hyperboloids sind, und die von einem beliebigen Punkte $\mathfrak{A}_1'$ der $C_I^{(4)}$ durch die beiden Gegenkanten gelegte Gerade eine Sekante der Raumkurve sein muß (Seite 59), welche zum andernmale in $\mathfrak{B}_2$ treffen möge, so wird $|\mathfrak{A}_1'\mathfrak{B}_2|$ eine Erzeugende der zweiten Regelschar des vorigen Hyperboloids sein; möge die durch $\mathfrak{A}_1'$ und das Gegenkantenpaar

$$|\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_3| \quad \text{und} \quad |\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_4|$$

gelegte Gerade der $C_I^{(4)}$ in $\mathfrak{B}_3$ zum andernmale begegnen, und endlich die durch $\mathfrak{A}_1'$ und das Gegenkantenpaar

$$|\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_4| \quad \text{und} \quad |\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3|$$

gelegte Gerade der $C_I^{(4)}$ in $\mathfrak{B}_4$ zum andernmale begegnen, und ziehen wir noch die Tangente $t_{\mathfrak{A}_1}$ im Punkte $\mathfrak{A}_1$ der $C_I^{(4)}$, so wird die Ebene $[\mathfrak{A}_1' t_{\mathfrak{A}_1}]$ der $C_I^{(4)}$ zum viertenmale in einem Punkte $\mathfrak{B}_1$ begegnen derart, daß jetzt die vier Ebenen

$$[\mathfrak{A}_1'\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1] \quad [\mathfrak{A}_1'\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2] \quad [\mathfrak{A}_1'\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_3] \quad [\mathfrak{A}_1'\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_4\mathfrak{B}_4],$$

welche durch die gemeinschaftliche Gerade $|\mathfrak{A}_1'\mathfrak{A}_1|$ gehen und einzeln die Punkte $\mathfrak{A}_1\,\mathfrak{A}_2\,\mathfrak{A}_3\,\mathfrak{A}_4$ enthalten, der $C_I^{(4)}$ in vier weiteren Punkten $\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_3\mathfrak{B}_4$ begegnen, die nach dem obigen Satze (Seite 57) ein Punktquadrupel der Raumkurve bilden müssen.

Hieraus folgt zugleich, daß die vier Strahlen

$$|\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1| \quad |\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2| \quad |\mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_3| \quad |\mathfrak{A}_4\mathfrak{B}_4|$$

einer und derselben Regelschar eines durch $|\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_1'|$ und die Raumkurve gelegten Hyperboloids angehören. Legen wir nun die Ebene $[\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_1]$, welche der $C_I^{(4)}$ zum viertenmale in $\mathfrak{A}_2'$ begegnen möge, ebenso die Ebene $[\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_3]$, welche in $\mathfrak{A}_3'$, und $[\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_4]$, welche in $\mathfrak{A}_4'$ die $C_I^{(4)}$ treffen möge, so werden

$$\mathfrak{A}_1'\,\mathfrak{A}_2'\,\mathfrak{A}_3'\,\mathfrak{A}_4'$$

ebenfalls ein Punktquadrupel der $C_I^{(4)}$ bilden.

Da nun $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_1'$ in einer Ebene liegen, so ist das durch $|\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_1'|$ und die $C_I^{(4)}$ gelegte Hyperboloid identisch mit dem durch $|\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1|$ und die $C_I^{(4)}$ gelegten, und da auch $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_2'$ in einer Ebene liegen, so ist auch $|\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_2'|$ eine Erzeugende dieses Hyperboloids, trifft also sämtliche Erzeugenden seiner zweiten Regelschar, zu der $|\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1|$ gehört, also liegen in je einer Ebene die vier Punkte

$$[\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_2'\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1] \quad [\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_2'\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2] \quad [\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_2'\mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_3] \quad [\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_2'\mathfrak{A}_4\mathfrak{B}_4].$$

Weil nun die Sekante $|\mathfrak{A}_2'\mathfrak{B}_3|$ der Kante $|\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3|$ des Tetraëders $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4$ begegnet, so muß sie nach dem obigen

Satze (Seite 59) auch der Gegenkante $|\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_4|$ desselben begegnen, und fahren wir so fort zu schließen, so finden wir folgende Ebenen, in denen je vier Punkte der $C_I^{(4)}$ liegen:

$$[\mathfrak{A}_1'\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2] \quad [\mathfrak{A}_2'\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_1] \quad [\mathfrak{A}_3'\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_4] \quad [\mathfrak{A}_4'\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_3]$$
$$[\mathfrak{A}_1'\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4\mathfrak{B}_2] \quad [\mathfrak{A}_2'\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4\mathfrak{B}_1] \quad [\mathfrak{A}_3'\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4\mathfrak{B}_4] \quad [\mathfrak{A}_4'\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4\mathfrak{B}_3]$$

$$[\mathfrak{A}_1'\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_3] \quad [\mathfrak{A}_2'\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_4] \quad [\mathfrak{A}_3'\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_1] \quad [\mathfrak{A}_4'\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_2]$$
$$[\mathfrak{A}_1'\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_4\mathfrak{B}_3] \quad [\mathfrak{A}_2'\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_4\mathfrak{B}_4] \quad [\mathfrak{A}_3'\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_4\mathfrak{B}_1] \quad [\mathfrak{A}_4'\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_4\mathfrak{B}_2]$$

$$[\mathfrak{A}_1'\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_4\mathfrak{B}_4] \quad [\mathfrak{A}_2'\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_4\mathfrak{B}_3] \quad [\mathfrak{A}_3'\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_4\mathfrak{B}_2] \quad [\mathfrak{A}_4'\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_4\mathfrak{B}_1]$$
$$[\mathfrak{A}_1'\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_4] \quad [\mathfrak{A}_2'\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_3] \quad [\mathfrak{A}_3'\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_2] \quad [\mathfrak{A}_4'\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_1]$$

$$[\mathfrak{A}_1'\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1] \quad [\mathfrak{A}_2'\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2] \quad [\mathfrak{A}_3'\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_3] \quad [\mathfrak{A}_4'\mathfrak{A}_4\mathfrak{A}_4\mathfrak{B}_4].$$

Diese Zusammenstellung läßt folgenden Satz erkennen:

Sind $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4$ und $\mathfrak{A}_1'\mathfrak{A}_2'\mathfrak{A}_3'\mathfrak{A}_4'$ zwei beliebige Punktquadrupel der Raumkurve, und zieht man aus jeder Ecke des einen Quadrupels die drei Transversalen, welche je ein Paar Gegenkanten des andern Quadrupels treffen, so erhält man zwölf Sekanten der Raumkurve, welche zu dreien in denselben vier neuen Punkten $\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_3\mathfrak{B}_4$ der $C_I^{(4)}$ zusammentreffen, die selbst ein drittes Quadrupel der $C_I^{(4)}$ bilden.

Dieser Satz läßt sich auch so aussprechen:

Sind $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4$ und $\mathfrak{A}_1'\mathfrak{A}_2'\mathfrak{A}_3'\mathfrak{A}_4'$ zwei beliebige Punktquadrupel der Raumkurve, und projiciert man von jeder der sechs Kanten des ersten Tetraëders aus die vier Ecken des zweiten auf die Raumkurve, so erhält man allemal dieselben vier neuen Punkte $\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_3\mathfrak{B}_4$, die ein drittes Punktquadrupel der $C_I^{(4)}$ bilden.

Vertauscht man die beiden ursprünglichen Punktquadrupel mit einander, so erhält man noch ein viertes zugehöriges Punktquadrupel $\mathfrak{B}_1'\mathfrak{B}_2'\mathfrak{B}_3'\mathfrak{B}_4'$.

Wir bemerken noch, daß zwei beliebige Punktquadrupel der $C_I^{(4)}$ im allgemeinen keine Gruppe von acht associierten Punkten bilden; denn da

$\mathfrak{A}_1'\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2$ in einer Ebene liegen, und

$\mathfrak{A}_2'\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4\mathfrak{B}_1$ „ „ „ „ ,

(Seite 62), so bilden die acht Punkte

$$\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4\mathfrak{A}_1'\mathfrak{A}_2'\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2$$

eine Gruppe von acht associierten Punkten (Seite 40); da in gleicher Weise

$\mathfrak{A}_3'\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4\mathfrak{B}_4$ in einer Ebene liegen, und

$\mathfrak{A}_4'\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_3$ „ „ „ „ ,

so bilden auch

$$\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4\mathfrak{A}_3'\mathfrak{A}_4'\mathfrak{B}_3\mathfrak{B}_4$$

eine Gruppe von acht associierten Punkten. Würden nun auch die Punkte

$$\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4\mathfrak{A}_1'\mathfrak{A}_2'\mathfrak{A}_3'\mathfrak{A}_4'$$

selbst eine Gruppe von acht associierten Punkten bilden, so müßten nach dem Reye'schen Satze (Seite 41) sowohl $|\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2|$ als auch $|\mathfrak{A}_3'\mathfrak{A}_4'|$ einem Hyperboloid angehören, welches durch die ganze $C_I^{(4)}$ hindurchginge, und ebenso müßten sowohl $|\mathfrak{B}_3\mathfrak{B}_4|$ als auch $|\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2'|$ einem Hyperboloid angehören, welches durch die ganze $C_I^{(4)}$ hindurchginge.

Andererseits gehören aber auch $|\mathfrak{A}_1'\mathfrak{A}_2'|$ und $|\mathfrak{A}_3'\mathfrak{A}_4'|$ einem durch die ganze $C_I^{(4)}$ gehenden Hyperboloid an (Seite 57), woraus folgen würde, daß alle vier Geraden

$$|\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2| \quad |\mathfrak{B}_3\mathfrak{B}_4| \quad |\mathfrak{A}_1'\mathfrak{A}_2'| \quad |\mathfrak{A}_3'\mathfrak{A}_4'|$$

einem und demselben durch die ganze $C_I^{(4)}$ gehenden Hyperboloid angehören müßten. Dies ist aber unmöglich, weil die beiden Kanten des Polartetraëders

$$|\mathfrak{O}_1\mathfrak{O}_2| \quad \text{und} \quad |\mathfrak{O}_3\mathfrak{O}_4|$$

allen vier Geraden begegnen (Seite 57), also nicht ein Paar konjugierter Strahlen für das durch die Raumkurve gehende Hyperboloid sein könnten.

In der vorigen Figur $\mathfrak{A}_i\mathfrak{A}_i'\mathfrak{B}_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ treten auch Tetraëderpaare auf, welche die bekannte Möbius'sche Figur zweier einander gleichzeitig ein- und umbeschriebener Tetra-



eder bilden. Denn wählt man z. B. zu Ecken zweier Tetraëder die Punkte

$$\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_1'\mathfrak{B}_3 \quad \text{und} \quad \mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4\mathfrak{A}_4'\mathfrak{B}_2,$$

so gehen die Seitenflächen derselben

$$\begin{array}{llllll}
[\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_1'] & \text{durch} & \mathfrak{B}_2, & [\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4\mathfrak{A}_4'] & \text{durch} & \mathfrak{B}_3, \\
[\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_3] & \text{„} & \mathfrak{A}_4', & [\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4\mathfrak{B}_2] & \text{„} & \mathfrak{A}_1', \\
[\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_1'\mathfrak{B}_3] & \text{„} & \mathfrak{A}_3, & [\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4'\mathfrak{B}_2] & \text{„} & \mathfrak{A}_1, \\
[\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_1'\mathfrak{B}_3] & \text{„} & \mathfrak{A}_4, & [\mathfrak{A}_4\mathfrak{A}_4'\mathfrak{B}_2] & \text{„} & \mathfrak{A}_2,
\end{array}$$

also die Seitenflächen des ersten gehen durch die Ecken des zweiten, und die Ecken des ersten liegen in den Seitenflächen des zweiten.

Solcher Tetraëderpaare erhalten wir 24, nämlich:

$$\begin{cases}\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_1'\mathfrak{B}_3\\ \mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4\mathfrak{A}_4'\mathfrak{B}_2\end{cases} \quad \begin{cases}\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_1'\mathfrak{B}_2\\ \mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_4\mathfrak{A}_4'\mathfrak{B}_3\end{cases} \quad \begin{cases}\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_4\mathfrak{A}_1'\mathfrak{B}_2\\ \mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_3'\mathfrak{B}_4\end{cases}$$

$$\begin{cases}\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_1'\mathfrak{B}_4\\ \mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4\mathfrak{A}_3'\mathfrak{B}_2\end{cases} \quad \begin{cases}\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_3'\mathfrak{B}_4\\ \mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_4\mathfrak{A}_2'\mathfrak{B}_1\end{cases} \quad \begin{cases}\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_4\mathfrak{A}_3'\mathfrak{B}_4\\ \mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_1'\mathfrak{B}_2\end{cases}$$

$$\begin{cases}\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_2'\mathfrak{B}_3\\ \mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4\mathfrak{A}_4'\mathfrak{B}_1\end{cases} \quad \begin{cases}\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_2'\mathfrak{B}_1\\ \mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_4\mathfrak{A}_3'\mathfrak{B}_4\end{cases} \quad \begin{cases}\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_4\mathfrak{A}_2'\mathfrak{B}_1\\ \mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4'\mathfrak{B}_3\end{cases}$$

$$\begin{cases}\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_2'\mathfrak{B}_4\\ \mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4\mathfrak{A}_3'\mathfrak{B}_1\end{cases} \quad \begin{cases}\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4'\mathfrak{B}_3\\ \mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_4\mathfrak{A}_1'\mathfrak{B}_2\end{cases} \quad \begin{cases}\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_4\mathfrak{A}_4'\mathfrak{B}_3\\ \mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_2'\mathfrak{B}_1\end{cases}$$

$$\begin{cases}\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3'\mathfrak{B}_1\\ \mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4\mathfrak{A}_2'\mathfrak{B}_4\end{cases} \quad \begin{cases}\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_1'\mathfrak{B}_4\\ \mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_4\mathfrak{A}_2'\mathfrak{B}_3\end{cases} \quad \begin{cases}\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_4\mathfrak{A}_1'\mathfrak{B}_3\\ \mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_2'\mathfrak{B}_4\end{cases}$$

$$\begin{cases}\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3'\mathfrak{B}_2\\ \mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4\mathfrak{A}_1'\mathfrak{B}_4\end{cases} \quad \begin{cases}\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_2'\mathfrak{B}_3\\ \mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_4\mathfrak{A}_1'\mathfrak{B}_4\end{cases} \quad \begin{cases}\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_4\mathfrak{A}_2'\mathfrak{B}_4\\ \mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_1'\mathfrak{B}_3\end{cases}$$

$$\begin{cases}\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_4'\mathfrak{B}_1\\ \mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4\mathfrak{A}_2'\mathfrak{B}_3\end{cases} \quad \begin{cases}\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4'\mathfrak{B}_1\\ \mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_4\mathfrak{A}_3'\mathfrak{B}_2\end{cases} \quad \begin{cases}\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_4\mathfrak{A}_3'\mathfrak{B}_1\\ \mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4'\mathfrak{B}_2\end{cases}$$

$$\begin{cases}\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_4'\mathfrak{B}_2\\ \mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4\mathfrak{A}_1'\mathfrak{B}_3\end{cases} \quad \begin{cases}\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_3'\mathfrak{B}_2\\ \mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_4\mathfrak{A}_4'\mathfrak{B}_1\end{cases} \quad \begin{cases}\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_4\mathfrak{A}_4'\mathfrak{B}_2\\ \mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_3'\mathfrak{B}_1.\end{cases}$$

Ferner wissen wir, daß die Tangenten der $C_I^{(4)}$ in den Punkten eines Quadrupels einer Regelschar eines Hyperboloids angehören, welches durch die ganze Raumkurve

geht; ist also $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4$ ein Punktquadrupel der $C_I^{(4)}$, und nennen wir die Tangenten in diesen Punkten

$$t_{\mathfrak{A}_1} = |\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_1|, \quad t_{\mathfrak{A}_2} = |\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_2|, \quad t_{\mathfrak{A}_3} = |\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_3|, \quad |t_{\mathfrak{A}_4} = |\mathfrak{A}_4\mathfrak{A}_4|,$$

so gehören $t_{\mathfrak{A}_1}t_{\mathfrak{A}_2}t_{\mathfrak{A}_3}t_{\mathfrak{A}_4}$ einer Regelschar eines durch die $C_I^{(4)}$ gehenden Hyperboloids an. Da nun nach dem Obigen (Seite 61) die vier Punkte

$$\mathfrak{A}_1'\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1$$

in einer Ebene liegen, so ist $|\mathfrak{A}_1'\mathfrak{B}_1|$ eine Erzeugende der zweiten Regelschar desjenigen Hyperboloids, welches durch $|\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_1| = t_{\mathfrak{A}_1}$ und die $C_I^{(4)}$ gelegt werden kann und dadurch schon bestimmt ist; folglich muß $|\mathfrak{A}_1'\mathfrak{B}_1|$ auch den Erzeugenden $t_{\mathfrak{A}_2}t_{\mathfrak{A}_3}t_{\mathfrak{A}_4}$ begegnen; und aus gleichem Grunde wird $|\mathfrak{A}_2'\mathfrak{B}_2|$ auch $t_{\mathfrak{A}_1}t_{\mathfrak{A}_3}t_{\mathfrak{A}_4}$ begegnen u. s. f. Wir haben daher folgende Ebenen, in denen je vier Punkte der $C_I^{(4)}$ liegen:

$$\begin{array}{cccc}
[\mathfrak{A}_1'\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1] & [\mathfrak{A}_1'\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_1] & [\mathfrak{A}_1'\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_1] & [\mathfrak{A}_1'\mathfrak{A}_4\mathfrak{A}_4\mathfrak{B}_1] \\
[\mathfrak{A}_2'\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_2] & [\mathfrak{A}_2'\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2] & [\mathfrak{A}_2'\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_2] & [\mathfrak{A}_2'\mathfrak{A}_4\mathfrak{A}_4\mathfrak{B}_2] \\
[\mathfrak{A}_3'\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_3] & [\mathfrak{A}_3'\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_3] & [\mathfrak{A}_3'\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_3] & [\mathfrak{A}_3'\mathfrak{A}_4\mathfrak{A}_4\mathfrak{B}_3] \\
[\mathfrak{A}_4'\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_4] & [\mathfrak{A}_4'\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_4] & [\mathfrak{A}_4'\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_4] & [\mathfrak{A}_4'\mathfrak{A}_4\mathfrak{A}_4\mathfrak{B}_4].
\end{array}$$

Hieraus folgt, daß $|\mathfrak{A}_1'\mathfrak{B}_1|$ $|\mathfrak{A}_2'\mathfrak{B}_2|$ $|\mathfrak{A}_3'\mathfrak{B}_3|$ $|\mathfrak{A}_4'\mathfrak{B}_4|$ einer und derselben Regelschar eines Hyperboloids angehören, deren anderer Regelschar $t_{\mathfrak{A}_1}t_{\mathfrak{A}_2}t_{\mathfrak{A}_3}t_{\mathfrak{A}_4}$ angehören. Dieses Hyperboloid ist aber, da $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4$ ein ganz beliebiges Punktquadrupel der $C_I^{(4)}$ war, auch ein ganz beliebiges, durch die Raumkurve gelegtes Hyperboloid. Wir können also folgenden Satz aussprechen:

Nimmt man auf der Raumkurve ein beliebiges Punktquadrupel $(\mathfrak{A}_1'\mathfrak{A}_2'\mathfrak{A}_3'\mathfrak{A}_4')$ und legt durch die $C_I^{(4)}$ ein beliebiges Hyperboloid; zieht man von $\mathfrak{A}_1'\mathfrak{A}_2'\mathfrak{A}_3'\mathfrak{A}_4'$ vier Erzeugende aus einer und derselben von den beiden Regelscharen des Hyperboloids, so begegnen diese vier Erzeugenden der $C_I^{(4)}$ in vier neuen Punkten $(\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_3\mathfrak{B}_4)$, die ebenfalls ein Quadrupel der Raumkurve bilden.

Auch folgt der Satz:

Nimmt man auf der Raumkurve ein beliebiges Punktquadrupel $(\mathfrak{A}_1'\mathfrak{A}_2'\mathfrak{A}_3'\mathfrak{A}_4')$ und legt durch diese vier Punkte und eine beliebige Tangente $t_{\mathfrak{A}_1}$ der $C_I^{(4)}$ vier Ebenen, so schneiden dieselben aus der $C_I^{(4)}$ vier neue Punkte $\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_3\mathfrak{B}_4$ aus, welche wiederum ein Punktquadrupel der Raumkurve bilden.

Dieser Satz ist nur ein specieller Fall eines früheren (Seite 57).

Gehen wir nochmals aus von einem beliebigen Punktquadrupel der $C_I^{(4)}$, d. h. von vier Punkten

$$\mathrm{t}_1 \ \mathrm{t}_2 \ \mathrm{t}_3 \ \mathrm{t}_4,$$

deren Tangenten an der Raumkurve

$$t_1 \ t_2 \ t_3 \ t_4$$

einer und derselben Regelschar eines durch die $C_I^{(4)}$ gelegten Hyperboloids angehören, dann können wir durch jeden der vier Punkte $\mathrm{t}_1\,\mathrm{t}_2\,\mathrm{t}_3\,\mathrm{t}_4$ die Erzeugende der zweiten Regelschar dieses Hyperboloids konstruieren:

$$s_1 \quad s_2 \quad s_3 \quad s_4$$

und erhalten diese vier Erzeugenden als die Schnittlinien je dreier Ebenen:

$$\begin{aligned} s_1 &= |[\mathrm{t}_1 t_2]\ [\mathrm{t}_1 t_3]\ [\mathrm{t}_1 t_4]| \\ s_2 &= |[\mathrm{t}_2 t_1]\ [\mathrm{t}_2 t_3]\ [\mathrm{t}_2 t_4]| \\ s_3 &= |[\mathrm{t}_3 t_1]\ [\mathrm{t}_3 t_2]\ [\mathrm{t}_3 t_4]| \\ s_4 &= |[\mathrm{t}_4 t_1]\ [\mathrm{t}_4 t_2]\ [\mathrm{t}_4 t_3]|. \end{aligned}$$

Da nun in dem durch die Tangente t_1 und die $C_I^{(4)}$ gelegten Hyperboloid t_1 und s_1 die beiden in t_1 sich kreuzenden Erzeugenden sind, so ist die Ebene $[t_1 s_1]$ die Schmiegungsebene im Punkte t_1 der $C_I^{(4)}$ (Seite 14), also erhalten wir die vier Schmiegungsebenen in den Punkten des Quadrupels

$$\begin{aligned} \tau_1 &= [s_1 t_1] \\ \tau_2 &= [s_2 t_2] \\ \tau_3 &= [s_3 t_3] \\ \tau_4 &= [s_4 t_4], \end{aligned}$$

und die Geraden $s_1 s_2 s_3 s_4$ sind die zu den Punkten $\mathrm{t}_1\mathrm{t}_2\mathrm{t}_3\mathrm{t}_4$ gehörenden Schmiegungsstrahlen (Seite 14), deren jeder noch

einen zweiten Punkt der $C_I^{(4)}$ enthält, nämlich den zugehörigen Schmiegungspunkt; nennen wir diese vier Schmiegungspunkte

$$\mathfrak{T}_1 \ \mathfrak{T}_2 \ \mathfrak{T}_3 \ \mathfrak{T}_4,$$

welche bez. auf

$$s_1 \quad s_2 \quad s_3 \quad s_4$$

liegen, so sehen wir, daß nicht allein die Ebene $\tau_1 = [t_1 s_1] = [t_1 \mathrm{t}_1 \mathfrak{T}_1]$ den vierten Schnittpunkt $\mathfrak{T}_1$ hat, sondern auch, weil t_1 und s_2 sich begegnen,

die Ebene $[t_1 \mathrm{t}_2]$ den vierten Schnittpunkt $\mathfrak{T}_2$ hat,
„ „ $[t_1 \mathrm{t}_3]$ „ „ „ $\mathfrak{T}_3$ „ ,
„ „ $[t_1 \mathrm{t}_4]$ „ „ „ $\mathfrak{T}_4$ „ .

Da nun $\mathrm{t}_1 \mathrm{t}_2 \mathrm{t}_3 \mathrm{t}_4$ ein Punktquadrupel bilden, so müssen nach dem vorigen Satze (Seite 65)

$$\mathfrak{T}_1 \mathfrak{T}_2 \mathfrak{T}_3 \mathfrak{T}_4$$

ein zweites Punktquadrupel bilden, also:

Wenn man in den vier Punkten eines Quadrupels der $C_I^{(4)}$ die Schmiegungsebenen konstruiert, deren jede der $C_I^{(4)}$ noch in einem vierten Punkte begegnet, so bilden diese vier neuen Punkte wieder ein Punktquadrupel der Raumkurve.

Weil ferner die Geraden t_2 und s_1 als Erzeugende verschiedener Regelscharen des Hyperboloids sich treffen, und die Ebene $[t_2 s_1]$ der $C_I^{(4)}$ in den Punkten $\mathrm{t}_2 \mathrm{t}_2 \mathrm{t}_1 \mathfrak{T}_1$ begegnet, so muß ein Hyperboloid, welches durch die Sekante $|\mathrm{t}_1 \mathrm{t}_2|$ und die Raumkurve gelegt wird, auch $|\mathrm{t}_2 \mathfrak{T}_1|$ zur Erzeugenden der andern Regelschar haben; ein solches Hyperboloid hat aber auch, wie wir wissen (Seite 57), die Gerade $|\mathrm{t}_3 \mathrm{t}_4|$ zu einer Erzeugenden der ersten Regelschar, also muß auch $|\mathrm{t}_3 \mathrm{t}_4|$ der $|\mathrm{t}_2 \mathfrak{T}_1|$ begegnen, d. h. die Ebene

$$[\mathrm{t}_2 \mathrm{t}_3 \mathrm{t}_4]$$

muß zum viertenmale der $C_I^{(4)}$ in dem Punkte $\mathfrak{T}_1$ begegnen; in gleicher Weise sehen wir:

$[\mathrm{t}_2 \mathrm{t}_3 \mathrm{t}_4]$ begegnet der $C_I^{(4)}$ noch in $\mathfrak{T}_1$,
$[\mathrm{t}_1 \mathrm{t}_3 \mathrm{t}_4]$ „ „ „ „ „ $\mathfrak{T}_2$,
$[\mathrm{t}_1 \mathrm{t}_2 \mathrm{t}_4]$ „ „ „ „ „ $\mathfrak{T}_3$,
$[\mathrm{t}_1 \mathrm{t}_2 \mathrm{t}_3]$ „ „ „ „ „ $\mathfrak{T}_4$;

es sind also die zu $\mathfrak{t}_1\mathfrak{t}_2\mathfrak{t}_3\mathfrak{t}_4$ zugehörigen Schmiegungspunkte $\mathfrak{T}_1\mathfrak{T}_2\mathfrak{T}_3\mathfrak{T}_4$ nichts anderes, als die vierten Schnittpunkte der gegenüberliegenden Seitenflächen des Tetraëders, welches das Punktquadrupel zu Ecken hat, und von diesen wissen wir bereits aus einem früheren Satze (Seite 58), daß sie ein neues Punktquadrupel bilden.

Wir haben also hierdurch folgende Eigenschaft eines Punktquadrupels der $C_I^{(4)}$ gefunden:

Ein Punktquadrupel der Raumkurve besitzt immer die Eigenschaft, daß die zu den Ecken desselben gehörenden Schmiegungspunkte in den gegenüberliegenden Seitenflächen des von dem Punktquadrupel gebildeten Tetraëders liegen.

Hieraus tritt deutlich die Analogie zwischen einem Punktquadrupel der $C_I^{(4)}$ und einem Punkttripel der ebenen $\mathfrak{K}^{(3)}$ hervor, da letzteres ein solches der $\mathfrak{K}^{(3)}$ einbeschriebenes Dreieck ist, dessen Tangenten in den Ecken ihre Tangentialpunkte in den gegenüberliegenden Seiten haben. Dem Kegelschnitte, der die $\mathfrak{K}^{(3)}$ in den Ecken eines Tripels berührt, ist analog das Hyperboloid, dessen einer Regelschar die vier Tangenten der $C_I^{(4)}$ in den Punkten eines Quadrupels angehören. (Vgl. A. Ameseder a. a. O. S. 42.)

§ 10. Besondere Hyperboloide des Büschels, dessen Grundkurve $C_I^{(4)}$ ist.

Wir haben gesehen (Seite 56), daß, wenn

$$\mathfrak{t}_1\mathfrak{t}_2\mathfrak{t}_3\mathfrak{t}_4$$

ein beliebiges Punktquadrupel der Raumkurve $C_I^{(4)}$ und

$$\mathfrak{O}_1\mathfrak{O}_2\mathfrak{O}_3\mathfrak{O}_4$$

das gemeinsame Polartetraëder des Flächenbüschels ist, dessen Grundkurve $C_I^{(4)}$ ist, allemal ein Paar Gegenkanten des Punktquadrupels einem Paar Gegenkanten des Polartetraëders begegnen muß, nämlich

$\lvert\mathfrak{t}_1\mathfrak{t}_2\rvert$	und	$\lvert\mathfrak{t}_3\mathfrak{t}_4\rvert$	begegnen	$\lvert\mathfrak{O}_1\mathfrak{O}_2\rvert$	und	$\lvert\mathfrak{O}_3\mathfrak{O}_4\rvert$,
$\lvert\mathfrak{t}_1\mathfrak{t}_3\rvert$	„	$\lvert\mathfrak{t}_2\mathfrak{t}_4\rvert$	„	$\lvert\mathfrak{O}_1\mathfrak{O}_3\rvert$	„	$\lvert\mathfrak{O}_2\mathfrak{O}_4\rvert$,
$\lvert\mathfrak{t}_1\mathfrak{t}_4\rvert$	„	$\lvert\mathfrak{t}_2\mathfrak{t}_3\rvert$	„	$\lvert\mathfrak{O}_1\mathfrak{O}_4\rvert$	„	$\lvert\mathfrak{O}_2\mathfrak{O}_3\rvert$;



hieraus folgt, daß jede der vier Geraden

$$|\mathfrak{O}_1\mathfrak{O}_2| \quad |\mathfrak{O}_3\mathfrak{O}_4| \quad |\mathfrak{t}_1\mathfrak{t}_3| \quad |\mathfrak{t}_2\mathfrak{t}_4|$$

jeder der vier anderen Geraden

$$|\mathfrak{O}_1\mathfrak{O}_3| \quad |\mathfrak{O}_2\mathfrak{O}_4| \quad |\mathfrak{t}_1\mathfrak{t}_2| \quad |\mathfrak{t}_3\mathfrak{t}_4|$$

begegnet, daß also diese acht Geraden auf einem Hyperboloid liegen und den beiden Regelscharen desselben zu je vieren angehören. Dieses Hyperboloid

$$\mathfrak{S}_1^{(2)}$$

enthält das windschiefe Vierseit, dessen aufeinanderfolgende Seiten $|\mathfrak{O}_1\mathfrak{O}_2|$ $|\mathfrak{O}_2\mathfrak{O}_4|$ $|\mathfrak{O}_4\mathfrak{O}_3|$ $|\mathfrak{O}_3\mathfrak{O}_1|$ sind, d. h. das windschiefe Vierseit

$$\mathfrak{O}_1\mathfrak{O}_2\mathfrak{O}_4\mathfrak{O}_3,$$

von dem ein Paar Gegenseiten der einen und das andere Paar Gegenseiten der anderen Regelschar des Hyperboloids angehören. Es enthält auch das zweite windschiefe Vierseit

$$\mathfrak{t}_1\mathfrak{t}_2\mathfrak{t}_4\mathfrak{t}_3,$$

welches dieselbe Eigenschaft, wie das vorige besitzt.

Das Hyperboloid $\mathfrak{S}_1^{(2)}$ schneidet zunächst die $C_I^{(4)}$ in den vier Punkten $\mathfrak{t}_1$ $\mathfrak{t}_2$ $\mathfrak{t}_3$ $\mathfrak{t}_4$ und geht durch die vier Seiten des windschiefen Vierseits

$$\mathfrak{O}_1\mathfrak{O}_2\mathfrak{O}_4\mathfrak{O}_3;*$$

da aber ein Hyperboloid vollständig und eindeutig bestimmt ist durch die vier Seiten eines windschiefen Vierseits und einen beliebigen Punkt des Raumes außerdem, so schließen wir:

Ein Hyperboloid, welches durch ein windschiefes Vierseit, dessen Seiten vier Kanten des Polartetraëders sind, gelegt wird und außerdem einen beliebigen Punkt $\mathfrak{t}_1$ der $C_I^{(4)}$ enthält, muß auch durch

---

* Daß das Hyperboloid $\mathfrak{S}_1^{(2)}$ nicht durch die ganze $C_I^{(4)}$ gehen kann, ist selbstverständlich, denn sonst müßte $\mathfrak{O}_1\mathfrak{O}_2\mathfrak{O}_3\mathfrak{O}_4$ ein Polartetraëder für $\mathfrak{S}_1^{(2)}$ sein, und da $\mathfrak{S}_1^{(2)}$ durch die Gerade $|\mathfrak{O}_1\mathfrak{O}_2|$ geht, so müßte dies ein sich selbst konjugierter Strahl sein, während doch $|\mathfrak{O}_3\mathfrak{O}_4|$ der zu $|\mathfrak{O}_1\mathfrak{O}_2|$ konjugierte Strahl ist.

die drei übrigen Punkte $\mathfrak{t}_2 \mathfrak{t}_3 \mathfrak{t}_4$ des zu $\mathfrak{t}_1$ gehörigen Punktquadrupels der $C_I^{(4)}$ gehen.

Wir haben nun ein ganzes Büschel von Flächen $\mathfrak{S}_1^{(2)}$, die durch das windschiefe Vierseit

$$\mathfrak{D}_1 \mathfrak{D}_2 \mathfrak{D}_4 \mathfrak{D}_3,$$

ein zweites Büschel von Flächen $\mathfrak{S}_2^{(2)}$, die durch das windschiefe Vierseit

$$\mathfrak{D}_1 \mathfrak{D}_4 \mathfrak{D}_3 \mathfrak{D}_2$$

und ein drittes Büschel von Flächen $\mathfrak{S}_3^{(2)}$, die durch das windschiefe Vierseit

$$\mathfrak{D}_1 \mathfrak{D}_3 \mathfrak{D}_2 \mathfrak{D}_4$$

hindurchgehen. Jede Fläche dieser drei Büschel, die durch einen Punkt eines Quadrupels der $C_I^{(4)}$ geht, muß auch durch die drei übrigen Punkte desselben gehen.

Ein Hyperboloid $\mathfrak{S}_1^{(2)}$ schneidet aber die $C_I^{(4)}$ im allgemeinen außer in den Punkten $\mathfrak{t}_1 \mathfrak{t}_2 \mathfrak{t}_3 \mathfrak{t}_4$ noch in vier weiteren Punkten $\mathfrak{s}_1 \mathfrak{s}_2 \mathfrak{s}_3 \mathfrak{s}_4$; da nun das durch das windschiefe Vierseit $\mathfrak{D}_1 \mathfrak{D}_2 \mathfrak{D}_4 \mathfrak{D}_3$ und den Punkt $\mathfrak{s}_1$ gelegte Hyperboloid nach dem vorigen Satze auch die übrigen drei Punkte des zu $\mathfrak{s}_1$ gehörenden Punktquadrupels enthalten muß, so folgt, daß die vier übrigen Schnittpunkte $\mathfrak{s}_1 \mathfrak{s}_2 \mathfrak{s}_3 \mathfrak{s}_4$ selbst ein zweites Punktquadrupel der $C_I^{(4)}$ bilden müssen. Wir schließen also:

Jedes der Hyperboloide $\mathfrak{S}_1^{(2)} \mathfrak{S}_2^{(2)} \mathfrak{S}_3^{(2)}$ aus den drei Flächenbüscheln, welche durch die windschiefen Vierseite $\mathfrak{D}_1 \mathfrak{D}_2 \mathfrak{D}_4 \mathfrak{D}_3$ oder $\mathfrak{D}_1 \mathfrak{D}_4 \mathfrak{D}_3 \mathfrak{D}_2$ oder $\mathfrak{D}_1 \mathfrak{D}_3 \mathfrak{D}_2 \mathfrak{D}_4$ gelegt werden können, schneidet die $C_I^{(4)}$ in acht Punkten, die sich zu je vieren in zwei Punktquadrupel der Raumkurve ($\mathfrak{t}_1 \mathfrak{t}_2 \mathfrak{t}_3 \mathfrak{t}_4$ und $\mathfrak{s}_1 \mathfrak{s}_2 \mathfrak{s}_3 \mathfrak{s}_4$) gruppieren.

Die beiden Punktquadrupel $\mathfrak{t}_1 \mathfrak{t}_2 \mathfrak{t}_3 \mathfrak{t}_4$ und $\mathfrak{s}_1 \mathfrak{s}_2 \mathfrak{s}_3 \mathfrak{s}_4$ sind hier nicht beliebig auf der $C_I^{(1)}$ gewählt, sondern abhängig von einander, indem das zweite durch das erste bestimmt wird.

Daß bei zwei beliebig gewählten Punktquadrupeln auf der $C_I^{(4)}$ sich die 16 Verbindungslinien der Punkte des einen mit denen des andern Quadrupels zu je vier in vier Regelscharen verteilen lassen, haben wir früher gesehen (Seite 60); hier tritt aber der weitere Umstand hinzu, daß diese vier

Regelscharen nicht vier verschiedenen Hyperboloiden angehören, sondern nur zwei verschiedenen Hyperboloiden, indem je zwei Regelscharen einem und demselben Hyperboloid angehören.

Da nämlich das Hyperboloid $\mathfrak{S}_1^{(2)}$ die je vier Erzeugenden der beiden Regelscharen

$$|\mathfrak{O}_1\mathfrak{O}_2| \quad |\mathfrak{O}_3\mathfrak{O}_4| \quad |\mathfrak{t}_1\mathfrak{t}_3| \quad |\mathfrak{t}_2\mathfrak{t}_4|\,,$$
$$|\mathfrak{O}_1\mathfrak{O}_3| \quad |\mathfrak{O}_2\mathfrak{O}_4| \quad |\mathfrak{t}_1\mathfrak{t}_2| \quad |\mathfrak{t}_3\mathfrak{t}_4|$$

enthält und außerdem der Raumkurve in vier weiteren Punkten $\mathfrak{s}_1\,\mathfrak{s}_2\,\mathfrak{s}_3\,\mathfrak{s}_4$ begegnet, die auch ein Punktquadrupel derselben bilden müssen, so können wir die Bezeichnung des letzteren so wählen, daß das Paar Gegenkanten

$|\mathfrak{s}_1\mathfrak{s}_2|$ und $|\mathfrak{s}_3\mathfrak{s}_4|$ dem Paare $|\mathfrak{O}_1\mathfrak{O}_2|$ und $|\mathfrak{O}_3\mathfrak{O}_4|$,
$|\mathfrak{s}_1\mathfrak{s}_3|$ „ $|\mathfrak{s}_2\mathfrak{s}_4|$ „ „ $|\mathfrak{O}_1\mathfrak{O}_3|$ „ $|\mathfrak{O}_2\mathfrak{O}_4|$,
$|\mathfrak{s}_1\mathfrak{s}_4|$ „ $|\mathfrak{s}_2\mathfrak{s}_3|$ „ „ $|\mathfrak{O}_1\mathfrak{O}_4|$ „ $|\mathfrak{O}_2\mathfrak{O}_3|$

begegnet; dann haben wir aber von dem Hyperboloid $\mathfrak{S}_1^{(2)}$ je sechs Erzeugende aus jeder der beiden Regelscharen, nämlich

$$|\mathfrak{O}_1\mathfrak{O}_2| \quad |\mathfrak{O}_3\mathfrak{O}_4| \quad |\mathfrak{t}_1\mathfrak{t}_3| \quad |\mathfrak{t}_2\mathfrak{t}_4| \quad |\mathfrak{s}_1\mathfrak{s}_3| \quad |\mathfrak{s}_2\mathfrak{s}_4|\,,$$
$$|\mathfrak{O}_1\mathfrak{O}_3| \quad |\mathfrak{O}_2\mathfrak{O}_4| \quad |\mathfrak{t}_1\mathfrak{t}_2| \quad |\mathfrak{t}_3\mathfrak{t}_4| \quad |\mathfrak{s}_1\mathfrak{s}_2| \quad |\mathfrak{s}_3\mathfrak{s}_4|\,,$$

und da irgend zwei Erzeugende aus verschiedenen Regelscharen sich immer begegnen, so schließen wir, daß immer vier Punkte $\mathfrak{t}_1\,\mathfrak{t}_3\,\mathfrak{s}_1\,\mathfrak{s}_2$, $\mathfrak{t}_1\,\mathfrak{t}_3\,\mathfrak{s}_3\,\mathfrak{s}_4$ u. s. f. in je einer Ebene liegen müssen; hieraus folgt aber, daß auch folgende acht Verbindungslinien

$$|\mathfrak{t}_1\mathfrak{s}_1| \quad |\mathfrak{t}_2\mathfrak{s}_2| \quad |\mathfrak{t}_3\mathfrak{s}_3| \quad |\mathfrak{t}_4\mathfrak{s}_4|$$
$$|\mathfrak{t}_1\mathfrak{s}_4| \quad |\mathfrak{t}_2\mathfrak{s}_3| \quad |\mathfrak{t}_3\mathfrak{s}_2| \quad |\mathfrak{t}_4\mathfrak{s}_1|$$

je vier Erzeugende der beiden Regelscharen eines und desselben Hyperboloids sein müssen, weil jede von den ersten vier Geraden jeder von den letzten vier begegnet. In gleicher Weise geht hervor, daß folgende acht Verbindungslinien

$$|\mathfrak{t}_1\mathfrak{s}_2| \quad |\mathfrak{t}_2\mathfrak{s}_1| \quad |\mathfrak{t}_3\mathfrak{s}_4| \quad |\mathfrak{t}_4\mathfrak{s}_3|$$
$$|\mathfrak{t}_1\mathfrak{s}_3| \quad |\mathfrak{t}_2\mathfrak{s}_4| \quad |\mathfrak{t}_3\mathfrak{s}_1| \quad |\mathfrak{t}_4\mathfrak{s}_2|$$

je vier Erzeugende der beiden Regelscharen eines und desselben neuen Hyperboloids sein müssen, weil jede von den ersten vier Geraden jeder von den letzten vier begegnet.

Daß diese beiden Hyperboloide (ebenso wie die früheren vier) durch die ganze Raumkurve $C_I^{(4)}$ gehen, ist unmittelbar einzusehen aus der Umkehrung des oben (Seite 64) ausgesprochenen Satzes, daß für ein beliebiges durch die $C_I^{(4)}$ gelegtes Hyperboloid die vier Erzeugenden einer und derselben Regelschar, welche von den vier Punkten eines Punktquadrupels ausgehen, der $C_I^{(4)}$ in vier weiteren Punkten eines zweiten Punktquadrupels begegnen müssen. Legen wir nämlich durch die Gerade $|\mathfrak{t}_1 \mathfrak{s}_1|$ und die $C_I^{(4)}$ das einzige dadurch völlig bestimmte Hyperboloid, so sind zu $\mathfrak{t}_1$ die drei übrigen Punkte $\mathfrak{t}_2\ \mathfrak{t}_3\ \mathfrak{t}_4$ und zu $\mathfrak{s}_1$ die drei übrigen Punkte $\mathfrak{s}_2\ \mathfrak{s}_3\ \mathfrak{s}_4$ der beiden Punktquadrupel vollständig bestimmt, und es müssen die durch $\mathfrak{t}_2\ \mathfrak{t}_3\ \mathfrak{t}_4$ gehenden Erzeugenden derselben Regelschar wie $|\mathfrak{t}_1 \mathfrak{s}_1|$ notwendig der $C_I^{(4)}$ in den Punkten $\mathfrak{s}_2\ \mathfrak{s}_3\ \mathfrak{s}_4$ begegnen; da aber $|\mathfrak{t}_1\ \mathfrak{s}_1|$ $|\mathfrak{t}_2\ \mathfrak{s}_2|$ $|\mathfrak{t}_3\ \mathfrak{s}_3|$ $|\mathfrak{t}_4\ \mathfrak{s}_4|$ einer Regelschar angehören, so muß auch umgekehrt das Hyperboloid, auf dem diese Regelschar verläuft, durch die ganze Raumkurve $C_I^{(4)}$ gehen.

Ebenso, wie wir von dem windschiefen Vierseit

$$\mathfrak{D}_1 \mathfrak{D}_2 \mathfrak{D}_4 \mathfrak{D}_3$$

ausgehend zu den Punktquadrupeln $\mathfrak{t}_1 \mathfrak{t}_2 \mathfrak{t}_3 \mathfrak{t}_4$ und $\mathfrak{s}_1 \mathfrak{s}_2 \mathfrak{s}_3 \mathfrak{s}_4$ gelangten vermittelst einer beliebigen durch dasselbe gelegten Fläche $\mathfrak{S}_1^{(2)}$, können wir von jedem der beiden übrigen windschiefen Vierseite

$$\mathfrak{D}_1\ \mathfrak{D}_4\ \mathfrak{D}_3\ \mathfrak{D}_2$$

und

$$\mathfrak{D}_1\ \mathfrak{D}_3\ \mathfrak{D}_2\ \mathfrak{D}_4$$

ausgehen und gelangen vermittelst zwei beliebiger durch dieselben gelegten Flächen $\mathfrak{S}_2^{(2)}$ und $\mathfrak{S}_3^{(2)}$ zu Punktquadrupeln

$$\mathfrak{t}_1'\ \mathfrak{t}_2'\ \mathfrak{t}_3'\ \mathfrak{t}_4' \quad \text{und} \quad \mathfrak{s}_1'\ \mathfrak{s}_2'\ \mathfrak{s}_3'\ \mathfrak{s}_4'$$

$$\mathfrak{t}_1''\mathfrak{t}_2''\mathfrak{t}_3''\mathfrak{t}_4'' \quad \text{und} \quad \mathfrak{s}_1''\mathfrak{s}_2''\mathfrak{s}_3''\mathfrak{s}_4'',$$

aus denen sich in gleicher Weise wie im ersten Falle je 16

Verbindungslinien herstellen lassen, die zu achten je einem Hyperboloid angehören; wir erhalten also im ganzen sechs solcher besonderer Hyperboloide durch die $C_I^{(4)}$, von denen wir die beiden Regelscharen, welche auf ihnen verlaufen, angeben wollen:

$$\left.\begin{array}{l}
\mathfrak{H}_1^{(2)}\left\{\begin{array}{llll}
|\mathfrak{t}_1\ \mathfrak{s}_1| & |\mathfrak{t}_2\ \mathfrak{s}_2| & |\mathfrak{t}_3\ \mathfrak{s}_3| & |\mathfrak{t}_4\ \mathfrak{s}_4| \\
|\mathfrak{t}_1\ \mathfrak{s}_4| & |\mathfrak{t}_2\ \mathfrak{s}_3| & |\mathfrak{t}_3\ \mathfrak{s}_2| & |\mathfrak{t}_4\ \mathfrak{s}_1|
\end{array}\right. \\
\mathfrak{H}_2^{(2)}\left\{\begin{array}{llll}
|\mathfrak{t}_1\ \mathfrak{s}_2| & |\mathfrak{t}_2\ \mathfrak{s}_1| & |\mathfrak{t}_3\ \mathfrak{s}_4| & |\mathfrak{t}_4\ \mathfrak{s}_3| \\
|\mathfrak{t}_1\ \mathfrak{s}_3| & |\mathfrak{t}_2\ \mathfrak{s}_4| & |\mathfrak{t}_3\ \mathfrak{s}_1| & |\mathfrak{t}_4\ \mathfrak{s}_2|
\end{array}\right.
\end{array}\right\}\mathfrak{S}_1^{(2)}$$

$$\left.\begin{array}{l}
\mathfrak{H}_3^{(2)}\left\{\begin{array}{llll}
|\mathfrak{t}_1'\ \mathfrak{s}_1'| & |\mathfrak{t}_2'\ \mathfrak{s}_2'| & |\mathfrak{t}_3'\ \mathfrak{s}_3'| & |\mathfrak{t}_4'\ \mathfrak{s}_4'| \\
|\mathfrak{t}_1'\ \mathfrak{s}_3'| & |\mathfrak{t}_2'\ \mathfrak{s}_4'| & |\mathfrak{t}_3'\ \mathfrak{s}_1'| & |\mathfrak{t}_4'\ \mathfrak{s}_2'|
\end{array}\right. \\
\mathfrak{H}_4^{(2)}\left\{\begin{array}{llll}
|\mathfrak{t}_1'\ \mathfrak{s}_2'| & |\mathfrak{t}_2'\ \mathfrak{s}_1'| & |\mathfrak{t}_3'\ \mathfrak{s}_4'| & |\mathfrak{t}_4'\ \mathfrak{s}_3'| \\
|\mathfrak{t}_1'\ \mathfrak{s}_4'| & |\mathfrak{t}_2'\ \mathfrak{s}_3'| & |\mathfrak{t}_3'\ \mathfrak{s}_2'| & |\mathfrak{t}_4'\ \mathfrak{s}_1'|
\end{array}\right.
\end{array}\right\}\mathfrak{S}_2^{(2)}$$

$$\left.\begin{array}{l}
\mathfrak{H}_5^{(2)}\left\{\begin{array}{llll}
|\mathfrak{t}_1''\ \mathfrak{s}_1''| & |\mathfrak{t}_2''\ \mathfrak{s}_2''| & |\mathfrak{t}_3''\ \mathfrak{s}_3''| & |\mathfrak{t}_4''\ \mathfrak{s}_4''| \\
|\mathfrak{t}_1''\ \mathfrak{s}_2''| & |\mathfrak{t}_2''\ \mathfrak{s}_1''| & |\mathfrak{t}_3''\ \mathfrak{s}_4''| & |\mathfrak{t}_4''\ \mathfrak{s}_3''|
\end{array}\right. \\
\mathfrak{H}_6^{(2)}\left\{\begin{array}{llll}
|\mathfrak{t}_1''\ \mathfrak{s}_3''| & |\mathfrak{t}_2''\ \mathfrak{s}_4''| & |\mathfrak{t}_3''\ \mathfrak{s}_1''| & |\mathfrak{t}_4''\ \mathfrak{s}_2''| \\
|\mathfrak{t}_1''\ \mathfrak{s}_4''| & |\mathfrak{t}_2''\ \mathfrak{s}_3''| & |\mathfrak{t}_3''\ \mathfrak{s}_2''| & |\mathfrak{t}_4''\ \mathfrak{s}_1''|
\end{array}\right.
\end{array}\right\}\mathfrak{S}_3^{(2)}$$

Es tritt nun der merkwürdige Umstand ein, daß, wie wir auch die drei Hyperboloide $\mathfrak{S}_1^{(2)}$ $\mathfrak{S}_2^{(2)}$ $\mathfrak{S}_3^{(2)}$ verändern mögen innerhalb der Flächenbüschel, deren Grundkurven die drei windschiefen Vierseite

$$\mathfrak{O}_1\mathfrak{O}_2\mathfrak{O}_4\mathfrak{O}_3, \quad \mathfrak{O}_1\mathfrak{O}_4\mathfrak{O}_3\mathfrak{O}_2, \quad \mathfrak{O}_1\mathfrak{O}_3\mathfrak{O}_2\mathfrak{O}_4$$

sind, doch die aus ihnen hervorgehenden sechs Hyperboloide $\mathfrak{H}_i^{(2)}$ $(i = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$ unverändert bleiben, indem nur an Stelle der Erzeugenden andere Erzeugende aus ihren Regelscharen treten.* Wir brauchen dies nur für das erste Hyperboloid $\mathfrak{H}_1^{(2)}$, dessen Regelscharen die je vier Geraden

$$\begin{array}{llll}
|\mathfrak{t}_1\mathfrak{s}_1| & |\mathfrak{t}_2\mathfrak{s}_2| & |\mathfrak{t}_3\mathfrak{s}_3| & |\mathfrak{t}_4\mathfrak{s}_4| \\
|\mathfrak{t}_1\mathfrak{s}_4| & |\mathfrak{t}_2\mathfrak{s}_3| & |\mathfrak{t}_3\mathfrak{s}_2| & |\mathfrak{t}_4\mathfrak{s}_1|
\end{array}$$

---

* A. Voß, Die Liniengeometrie in ihrer Anwendung auf die Flächen zweiten Grades (Math. Ann. Bd. 10, S. 143).

A. Ameseder, a. a. O. S. 16.

G. Westphal, Ueber das simultane System zweier quaternärer Formen zweiten Grades etc. (Math. Ann. Bd. 13, S. 16).

enthalten, nachzuweisen. Dieses Hyperboloid $\mathfrak{H}_1^{(2)}$ (und ähnliches gilt für die übrigen fünf) besitzt nämlich die besondere Eigenschaft, daß auf ihm die beiden windschiefen Vierseite

$$\mathfrak{t}_1 \mathfrak{s}_1 \mathfrak{t}_4 \mathfrak{s}_4 \quad \text{und} \quad \mathfrak{t}_2 \mathfrak{s}_2 \mathfrak{t}_3 \mathfrak{s}_3$$

vollständig verlaufen und gleichzeitig der Raumkurve $C_I^{(4)}$ einbeschrieben sind.

Wir haben aber oben (Seite 16) den Satz bewiesen, daß, wenn auf einem durch die $C_I^{(4)}$ gelegten Hyperboloid ein solches Vierseit existiert, welches auf dem Hyperboloid verläuft und gleichzeitig der $C_I^{(4)}$ einbeschrieben ist, dann eine Schar unendlich vieler derartiger windschiefer Vierseite vorhanden ist, indem jeder Punkt der $C_I^{(4)}$ zur ersten Ecke eines solchen windschiefen Vierseits gewählt werden kann, welches sich immer schließt. Nicht jedes beliebige durch die $C_I^{(4)}$ gelegte Hyperboloid besitzt diese Eigenschaft, aber die sechs von uns gefundenen Hyperboloide $\mathfrak{H}_1^{(2)}$ $\mathfrak{H}_2^{(2)}$ $\mathfrak{H}_3^{(2)}$ $\mathfrak{H}_4^{(2)}$ $\mathfrak{H}_5^{(2)}$ $\mathfrak{H}_6^{(2)}$ haben dieselbe.

Aus dem Obigen können wir nun den Satz schließen:

Wenn ein durch die Raumkurve $C_I^{(4)}$ gelegtes Hyperboloid die Eigenschaft besitzt, der $C_I^{(4)}$ einbeschriebene windschiefe Vierseite zuzulassen, die auf dem Hyperboloid verlaufen, so gehört allemal ein Paar gegenüberliegender Ecken eines solchen Vierseits einem Punktquadrupel der $C_I^{(4)}$ an, und das andere Paar Gegenecken einem zweiten Punktquadrupel derselben.

Dieser Satz läßt sich auch direkt so beweisen: Sei $\mathfrak{t}_1 \mathfrak{s}_1 \mathfrak{t}_4 \mathfrak{s}_4$ ein windschiefes Vierseit, von dem die Gegenseiten $|\mathfrak{t}_1 \mathfrak{s}_1|$ $|\mathfrak{t}_4 \mathfrak{s}_4|$ der einen Regelschar, die Gegenseiten $|\mathfrak{t}_1 \mathfrak{s}_4|$ $|\mathfrak{t}_4 \mathfrak{s}_1|$ der andern Regelschar eines durch die ganze $C_I^{(4)}$ gehenden Hyperboloids $\mathfrak{H}_1^{(2)}$ angehören, dann enthält die Ebene $[\mathfrak{t}_1 \mathfrak{s}_1 \mathfrak{s}_4]$, weil sie durch zwei in $\mathfrak{t}_1$ sich kreuzende Erzeugende der verschiedenen Regelscharen geht, also die Berührungsebene im Punkte $\mathfrak{t}_1$ des Hyperboloids ist, die Tangente t_1 der $C_I^{(4)}$ im Punkte $\mathfrak{t}_1$, und ebenso enthält die Ebene $[\mathfrak{t}_4 \mathfrak{s}_4 \mathfrak{s}_1]$ die

Tangente t_4 der $C_I^{(4)}$ im Punkte $\mathfrak{t}_4$. Die Schnittlinie dieser beiden Ebenen

$$|[\mathfrak{t}_1 \mathfrak{s}_1 \mathfrak{s}_4] \quad [\mathfrak{t}_4 \mathfrak{s}_4 \mathfrak{s}_1]| \equiv |\mathfrak{s}_1 \mathfrak{s}_4|$$

muß also den beiden Tangenten t_1 und t_4 begegnen. Denken wir uns nun ein neues Hyperboloid durch die Tangente t_1 und die ganze Raumkurve $C_I^{(4)}$ hindurchgelegt, welches vollständig und eindeutig bestimmt ist, so wird die Gerade $|\mathfrak{s}_1 \mathfrak{s}_4|$ der zweiten Regelschar dieses Hyperboloids angehören, und da auch $|\mathfrak{s}_1 \mathfrak{s}_4|$ und t_4 in einer Ebene liegen, so wird das durch die Sekante $|\mathfrak{s}_1 \mathfrak{s}_4|$ und die $C_I^{(4)}$ gelegte Hyperboloid, welches mit dem vorigen identisch ist, auch die Gerade t_4 zu einer Erzeugenden der ersten Regelschar haben; also gehören t_1 und t_4 derselben Regelschar eines durch die $C_I^{(4)}$ gehenden Hyperboloids an, mithin die Berührungspunkte $\mathfrak{t}_1$ und $\mathfrak{t}_4$ einem Punktquadrupel auf der Raumkurve, w. z. b. w.

Wir wollen den jetzt noch fehlenden Nachweis dafür, daß bei Veränderung des durch das windschiefe Vierseit $\mathfrak{O}_1 \mathfrak{O}_2 \mathfrak{O}_4 \mathfrak{O}_3$ gelegten Hyperboloids $\mathfrak{S}_1^{(2)}$ zwar die Punktquadrupel $\mathfrak{t}_1 \mathfrak{t}_2 \mathfrak{t}_3 \mathfrak{t}_4$ und $\mathfrak{s}_1 \mathfrak{s}_2 \mathfrak{s}_3 \mathfrak{s}_4$ sich ändern, aber das aus ihnen entspringende Hyperboloid $\mathfrak{H}_1^{(2)}$ dasselbe bleibt, dadurch führen, daß wir umgekehrt auf dem Hyperboloid $\mathfrak{H}_1^{(2)}$ von einem beliebigen andern Punkte der $C_I^{(4)}$ ausgehend die beiden neuen Punktquadrupel herstellen und dann nachweisen, daß dieselben auf einer zweiten Fläche $\mathfrak{S}^{(2)}$ liegen, die durch den angenommenen Punkt und das windschiefe Vierseit $\mathfrak{O}_1 \mathfrak{O}_2 \mathfrak{O}_4 \mathfrak{O}_3$ bestimmt wird. Sei also $\mathfrak{x}_1$ ein beliebiger Punkt der $C_I^{(4)}$, und ziehen wir von $\mathfrak{x}_1$ aus auf dem Hyperboloid $\mathfrak{H}_1^{(2)}$ die beiden Erzeugenden, welche die $C_I^{(4)}$ in $\mathfrak{y}_1$ und $\mathfrak{y}_4$ treffen, so müssen sich die von $\mathfrak{y}_1$ und $\mathfrak{y}_4$ ausgehenden anderen Erzeugenden des Hyperboloids wieder in einem Punkte $\mathfrak{x}_4$ der $C_I^{(4)}$ treffen (Seite 16), d. h. wir haben ein zweites sich schließendes windschiefes Vierseit

$$\mathfrak{x}_1 \mathfrak{y}_1 \mathfrak{x}_4 \mathfrak{y}_4,$$

welches auf dem Hyperboloid $\mathfrak{H}_1^{(2)}$ verläuft und der $C_I^{(4)}$ einbeschrieben ist. Aus dem vorhin bewiesenen Satze (Seite 73)

wissen wir, daß das Paar Gegenecken $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{x}_4$ dieses windschiefen Vierseits einem bestimmten Punktquadrupel der Raumkurve angehört und das Paar Gegenecken $\mathfrak{y}_1$ und $\mathfrak{y}_4$ einem zweiten Punktquadrupel. Jedes dieser beiden Punktquadrupel ist schon durch eine seiner vier Ecken völlig bestimmt, und beide hängen durch das Hyperboloid $\mathfrak{H}_1^{(2)}$ mit einander zusammen, also sind beide durch den einzigen willkürlich zu wählenden Punkt $\mathfrak{x}_1$ der $C_I^{(4)}$ bestimmt.

Wir ergänzen nun das erste Punktquadrupel, zu dem $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{x}_4$ gehören, durch die beiden noch fehlenden Punkte $\mathfrak{x}_2$ und $\mathfrak{x}_3$, und ebenso das zweite Punktquadrupel, zu dem $\mathfrak{y}_1$ und $\mathfrak{y}_4$ gehören, durch die beiden noch fehlenden Punkte $\mathfrak{y}_2$ und $\mathfrak{y}_3$; dann können wir diese noch fehlenden Punkte so bezeichnen (Seite 70), daß die vier Geraden

$$|\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_1| \quad |\mathfrak{x}_2\mathfrak{y}_2| \quad |\mathfrak{x}_3\mathfrak{y}_3| \quad |\mathfrak{x}_4\mathfrak{y}_4|$$

der einen Regelschar des Hyperboloids $\mathfrak{H}_1^{(2)}$ und die vier Geraden

$$|\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_4| \quad |\mathfrak{x}_2\mathfrak{y}_3| \quad |\mathfrak{x}_3\mathfrak{y}_2| \quad |\mathfrak{x}_4\mathfrak{y}_1|$$

der andern Regelschar desselben angehören, woraus zugleich ein zweites der Raumkurve einbeschriebenes und auf dem Hyperboloid $\mathfrak{H}_1^{(2)}$ verlaufendes windschiefes Vierseit $\mathfrak{x}_2\mathfrak{y}_2\mathfrak{x}_3\mathfrak{y}_3$ hervorgeht.

Aus diesen acht, den beiden Regelscharen des Hyperboloids angehörenden Erzeugenden folgt, weil je zwei, verschiedenen Regelscharen eines Hyperboloids angehörende Erzeugende sich treffen müssen, also immer vier Punkte in einer Ebene liegen, daß auch jede der vier Verbindungslinien

$$|\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2| \quad |\mathfrak{x}_3\mathfrak{x}_4| \quad |\mathfrak{y}_1\mathfrak{y}_2| \quad |\mathfrak{y}_3\mathfrak{y}_4|$$

jeder der vier Verbindungslinien

$$|\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_3| \quad |\mathfrak{x}_2\mathfrak{x}_4| \quad |\mathfrak{y}_1\mathfrak{y}_3| \quad |\mathfrak{y}_2\mathfrak{y}_4|$$

begegnen muß, daß also diese acht Geraden den beiden Regelscharen eines neuen Hyperboloids $\mathfrak{S}^{(2)}$ angehören müssen, von welchem wir erkennen werden, daß es durch das windschiefe Vierseit $\mathfrak{O}_1\mathfrak{O}_2\mathfrak{O}_4\mathfrak{O}_3$ gehen muß, also zu demselben Flächenbüschel wie $\mathfrak{S}_1^{(2)}$ gehört, dessen Grundkurve dieses windschiefe Vierseit ist.

In der That, sowohl $\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2\mathfrak{x}_3\mathfrak{x}_4$, als auch $\mathfrak{y}_1\mathfrak{y}_2\mathfrak{y}_3\mathfrak{y}_4$ ist ein Punktquadrupel der $C_I^{(4)}$, und wir wissen, daß ein Paar Gegenkanten eines Punktquadrupels allemal einem Paar Gegenkanten des Polartetraëders begegnen muß (S. 56). Nennen wir

$$|\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_4| \quad \text{und} \quad |\mathfrak{x}_2\mathfrak{x}_3|$$

das Paar Gegenkanten, welches den Gegenkanten des Polartetraëders

$$|\mathfrak{O}_1\mathfrak{O}_4| \quad \text{und} \quad |\mathfrak{O}_2\mathfrak{O}_3|$$

begegnet, so sehen wir, weil $|\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_4|$ und $|\mathfrak{y}_1\mathfrak{y}_4|$ die Diagonalen des windschiefen Vierseits $\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_1\mathfrak{x}_4\mathfrak{y}_4$ sind, welches aus vier Erzeugenden des Hyperboloids $\mathfrak{H}_1^{(2)}$ gebildet wird, daß $|\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_4|$ und $|\mathfrak{y}_1\mathfrak{y}_4|$ konjugierte Strahlen (reciproke Polaren) in Bezug auf das Hyperboloid $\mathfrak{H}_1^{(2)}$ sein müssen; da dieses aber durch die ganze $C_I^{(4)}$ geht, also $\mathfrak{O}_1\mathfrak{O}_2\mathfrak{O}_3\mathfrak{O}_4$ zum Polartetaëder hat, so sind auch $|\mathfrak{O}_1\mathfrak{O}_2|$ und $|\mathfrak{O}_3\mathfrak{O}_4|$ konjugierte Strahlen in Bezug auf das Hyperboloid $\mathfrak{H}_1^{(2)}$. Wenn aber ein Strahl $|\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_4|$ einem Paar konjugierter Strahlen einer $F^{(2)}$ begegnet, so muß auch sein konjugierter Strahl $|\mathfrak{y}_1\mathfrak{y}_4|$ demselben Paar konjugierter Strahlen begegnen; wir schließen also, daß die vier Strahlen

$$|\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_4| \quad |\mathfrak{x}_2\mathfrak{x}_3| \quad |\mathfrak{y}_1\mathfrak{y}_4| \quad |\mathfrak{y}_2\mathfrak{y}_3|$$

demselben Paar Gegenkanten

$$|\mathfrak{O}_1\mathfrak{O}_4| \quad \text{und} \quad |\mathfrak{O}_2\mathfrak{O}_3|$$

des Polartetraëders begegnen.

Die beiden Punktquadrupel $\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2\mathfrak{x}_3\mathfrak{x}_4$ und $\mathfrak{y}_1\mathfrak{y}_2\mathfrak{y}_3\mathfrak{y}_4$ haben nun die drei Paare von Gegenkanten

$$\begin{cases} |\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2| & \text{und} & |\mathfrak{x}_3\mathfrak{x}_4| \\ |\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_3| & ,, & |\mathfrak{x}_2\mathfrak{x}_4| \\ |\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_4| & ,, & |\mathfrak{x}_2\mathfrak{x}_3| \end{cases} \qquad \begin{cases} |\mathfrak{y}_1\mathfrak{y}_2| & \text{und} & |\mathfrak{y}_3\mathfrak{y}_4| \\ |\mathfrak{y}_1\mathfrak{y}_3| & ,, & |\mathfrak{y}_2\mathfrak{y}_4| \\ |\mathfrak{y}_1\mathfrak{y}_4| & ,, & |\mathfrak{y}_2\mathfrak{y}_3| \end{cases}$$

Da das Gegenkantenpaar $|\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_4|$ und $|\mathfrak{x}_2\mathfrak{x}_3|$ bereits dem Gegenkantenpaar $|\mathfrak{O}_1\mathfrak{O}_4|$ und $|\mathfrak{O}_2\mathfrak{O}_3|$ begegnet, so müssen die beiden übrigen Gegenkantenpaare des Punktquadrupels den beiden übrigen Gegenkantenpaaren des Polartetraëders begegnen, und dasselbe gilt für das zweite Punktquadrupel $\mathfrak{y}_1\mathfrak{y}_2\mathfrak{y}_3\mathfrak{y}_4$. Begegnet nun das Paar $|\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_3|$ und $|\mathfrak{x}_2\mathfrak{x}_4|$ dem Paare $|\mathfrak{O}_1\mathfrak{O}_3|$ und $|\mathfrak{O}_2\mathfrak{O}_4|$, so muß auch $|\mathfrak{y}_1\mathfrak{y}_3|$ und $|\mathfrak{y}_2\mathfrak{y}_4|$

demselben begegnen, und es ist nicht möglich, daß das dritte Paar $|\mathfrak{y}_1\mathfrak{y}_2|$ und $|\mathfrak{y}_3\mathfrak{y}_4|$ dem Paare $|\mathfrak{O}_1\mathfrak{O}_3|$ und $|\mathfrak{O}_2\mathfrak{O}_4|$ begegnete; denn von den vier Geraden

$$|\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_3| \quad |\mathfrak{x}_2\mathfrak{x}_4| \quad |\mathfrak{y}_1\mathfrak{y}_2| \quad |\mathfrak{y}_3\mathfrak{y}_4|$$

gehören die beiden ersten der einen, die beiden andern der zweiten Regelschar des Hyperboloids $\mathfrak{H}_1^{(2)}$ an; sollten also dieselben beiden Geraden $|\mathfrak{O}_1\mathfrak{O}_3|$ und $|\mathfrak{O}_2\mathfrak{O}_4|$ allen vieren begegnen, so müßten sie die Diagonalen des von den letzten vier Geraden gebildeten windschiefen Vierseits sein; es müßte also

$$|\mathfrak{O}_1\mathfrak{O}_3| \equiv |[\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_3\mathfrak{y}_1\mathfrak{y}_2] \quad [\mathfrak{x}_2\mathfrak{x}_4\mathfrak{y}_3\mathfrak{y}_4]|$$
$$|\mathfrak{O}_2\mathfrak{O}_4| \equiv |[\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_3\mathfrak{y}_3\mathfrak{y}_4] \quad [\mathfrak{x}_2\mathfrak{x}_4\mathfrak{y}_1\mathfrak{y}_2]|$$

sein, und da dann das dritte Paar $|\mathfrak{O}_1\mathfrak{O}_2|$ und $|\mathfrak{O}_3\mathfrak{O}_4|$ den vier Geraden

$$|\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2| \quad |\mathfrak{x}_3\mathfrak{x}_4| \quad |\mathfrak{y}_1\mathfrak{y}_3| \quad |\mathfrak{y}_2\mathfrak{y}_4|$$

begegnen müßte, so müßte in gleicher Weise

$$|\mathfrak{O}_1\mathfrak{O}_2| \equiv |[\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2\mathfrak{y}_1\mathfrak{y}_3] \quad [\mathfrak{x}_3\mathfrak{x}_4\mathfrak{y}_2\mathfrak{y}_4]|$$
$$|\mathfrak{O}_3\mathfrak{O}_4| \equiv |[\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2\mathfrak{y}_2\mathfrak{y}_4] \quad [\mathfrak{x}_3\mathfrak{x}_4\mathfrak{y}_1\mathfrak{y}_3]|$$

sein; dies ist aber nicht möglich, denn sonst müßten

$|\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_1|$ und $|\mathfrak{x}_4\mathfrak{y}_4|$ beide in der Ebene $[\mathfrak{O}_1\mathfrak{O}_2\mathfrak{O}_3]$ liegen,
$|\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_3|$ „ $|\mathfrak{x}_4\mathfrak{y}_2|$ „ „ „ „ $[\mathfrak{O}_1\mathfrak{O}_2\mathfrak{O}_4]$ „ ,
$|\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_2|$ „ $|\mathfrak{x}_4\mathfrak{y}_3|$ „ „ „ „ $[\mathfrak{O}_1\mathfrak{O}_3\mathfrak{O}_4]$ „ ,
$|\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_4|$ „ $|\mathfrak{x}_4\mathfrak{y}_1|$ „ „ „ „ $[\mathfrak{O}_2\mathfrak{O}_3\mathfrak{O}_4]$ „ ;

da also $\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_1\mathfrak{x}_4\mathfrak{y}_4$ in einer Ebene liegen, so müßten auch $|\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_4|$ und $|\mathfrak{y}_1\mathfrak{y}_4|$ sich treffen, was widersinnig ist; auch geht schon aus der willkürlichen Annahme von $\mathfrak{x}_1$ hervor, daß dieser Punkt gewiß nicht in der festen Ebene $[\mathfrak{O}_1\mathfrak{O}_2\mathfrak{O}_3]$ liegen wird. Bei der Ungereimtheit unserer Annahme bleibt nichts anderes übrig, als daß das Kantenpaar

$|\mathfrak{O}_1\mathfrak{O}_3|$ und $|\mathfrak{O}_2\mathfrak{O}_4|$ den vier Strahlen $|\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_3|$ $|\mathfrak{x}_2\mathfrak{x}_4|$ $|\mathfrak{y}_1\mathfrak{y}_3|$ $|\mathfrak{y}_2\mathfrak{y}_4|$

und endlich das Kantenpaar

$|\mathfrak{O}_1\mathfrak{O}_2|$ und $|\mathfrak{O}_3\mathfrak{O}_4|$ den vier Strahlen $|\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2|$ $|\mathfrak{x}_3\mathfrak{x}_4|$ $|\mathfrak{y}_1\mathfrak{y}_2|$ $|\mathfrak{y}_3\mathfrak{y}_4|$

begegnet. Hieraus folgt aber, daß das Hyperboloid $\mathfrak{S}^{(2)}$, dessen beiden Regelscharen die je vier Geraden angehören

$$|\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2| \quad |\mathfrak{x}_3\mathfrak{x}_4| \quad |\mathfrak{y}_1\mathfrak{y}_2| \quad |\mathfrak{y}_3\mathfrak{y}_4|,$$
$$|\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_3| \quad |\mathfrak{x}_2\mathfrak{x}_4| \quad |\mathfrak{y}_1\mathfrak{y}_3| \quad |\mathfrak{y}_2\mathfrak{y}_4|,$$

sowohl die Geraden $|\mathfrak{O}_1\mathfrak{O}_3|$ und $|\mathfrak{O}_2\mathfrak{O}_4|$ zu Erzeugenden der ersten Regelschar, als auch die Geraden $|\mathfrak{O}_1\mathfrak{O}_2|$ und $|\mathfrak{O}_3\mathfrak{O}_4|$ zu Erzeugenden der zweiten Regelschar haben muß, also durch die vier Seiten des windschiefen Vierseits $\mathfrak{O}_1\mathfrak{O}_2\mathfrak{O}_4\mathfrak{O}_3$ hindurchgeht. Hieraus folgt umgekehrt, daß das durch die vier Seiten des windschiefen Vierseits $\mathfrak{O}_1\mathfrak{O}_2\mathfrak{O}_4\mathfrak{O}_3$ und den willkürlich auf der $C_I^{(4)}$ gewählten Punkt $\mathfrak{x}_1$ gelegte Hyperboloid $\mathfrak{S}^{(2)}$ die $C_I^{(4)}$ in den übrigen Punkten $\mathfrak{x}_2\mathfrak{x}_3\mathfrak{x}_4\mathfrak{y}_1\mathfrak{y}_2\mathfrak{y}_3\mathfrak{y}_4$ schneidet, aus denen sich die beiden windschiefen Vierseite $\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_1\mathfrak{x}_4\mathfrak{y}_4$ und $\mathfrak{x}_2\mathfrak{y}_2\mathfrak{x}_3\mathfrak{y}_3$ zusammensetzen lassen, deren Seiten ganz auf dem vorigen Hyperboloid $\mathfrak{H}_1^{(2)}$ liegen und abwechselnd den beiden Regelscharen desselben angehören.

Hierdurch ist nun der gewünschte Nachweis geliefert, daß, wie wir auch die Hyperboloide $\mathfrak{S}_1^{(2)}$ $\mathfrak{S}_2^{(2)}$ $\mathfrak{S}_3^{(2)}$ in den Büscheln, deren Grundkurven die drei windschiefen Vierseite sind

$$\mathfrak{O}_1\mathfrak{O}_2\mathfrak{O}_4\mathfrak{O}_3, \quad \mathfrak{O}_1\mathfrak{O}_4\mathfrak{O}_3\mathfrak{O}_2, \quad \mathfrak{O}_1\mathfrak{O}_3\mathfrak{O}_2\mathfrak{O}_4$$

verändern mögen, doch immer nur die sechs bestimmten Hyperboloide $\mathfrak{H}_i^{(2)}$ $(i = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$ aus ihnen entspringen, welche durch die ganze $C_I^{(4)}$ gehen und die Eigenschaft besitzen, daß auf jedem derselben eine Schar windschiefer Vierseite vorkommen, die der $C_I^{(4)}$ einbeschrieben sind und zu Seiten abwechselnd Erzeugende aus den beiden Regelscharen eines solchen Hyperboloids haben.

Verfolgen wir jetzt auf einem dieser sechs Hyperboloide $(\mathfrak{H}_1^{(2)})$ die Schar der windschiefen Vierseite, welche auf ihm verlaufen und der $C_I^{(4)}$ einbeschrieben sind, deren eines wir $\mathfrak{t}_1\mathfrak{s}_1\mathfrak{t}_4\mathfrak{s}_4$ genannt haben, so kommen in dieser Schar solche vor, die ausarten. Das Hyperboloid $\mathfrak{H}_1^{(2)}$ besitzt nämlich, wie jedes durch die $C_I^{(4)}$ gelegte, vier besondere Erzeugende der einen Regelschar und ebenso vier der andern Regelschar, welche die $C_I^{(4)}$ berühren. Nennen wir $\mathfrak{P}$ einen solchen Berührungspunkt einer Erzeugenden des Hyperboloids $\mathfrak{H}_1^{(2)}$ mit der $C_I^{(4)}$ und wählen ihn zum Ausgangspunkte eines wind-

schiefen Vierseits, welches auf $\mathfrak{H}_1^{(2)}$ verläuft und der $C_I^{(4)}$ einbeschrieben ist, so artet ein solches Vierseit aus; die Erzeugende $|\mathfrak{t}_1\mathfrak{s}_1|$ wird die Tangente in $\mathfrak{P}$ an der $C_I^{(4)}$, indem die Punkte $\mathfrak{t}_1$ und $\mathfrak{s}_1$ zusammenfallen; die Erzeugende $|\mathfrak{s}_1\mathfrak{t}_4|$ wird die durch $\mathfrak{P}$ gehende Erzeugende der anderen Regelschar und begegne der $C_I^{(4)}$ in dem zweiten Punkte $\mathfrak{P}_1$; also wird $\mathfrak{t}_4 \equiv \mathfrak{P}_1$; die Erzeugende $|\mathfrak{t}_1\mathfrak{s}_4|$ ist aber dieselbe Erzeugende $|\mathfrak{P}\mathfrak{P}_1|$, also fallen $\mathfrak{t}_4$ und $\mathfrak{s}_4$ zusammen, und die vierte Seite des Vierseits $|\mathfrak{t}_4\mathfrak{s}_4|$ wird die Tangente der $C_I^{(4)}$ im Punkte $\mathfrak{P}_1$; von dem Vierseit $\mathfrak{t}_1\mathfrak{s}_1\mathfrak{t}_4\mathfrak{s}_4$ gehen also zwei Gegenseiten in die Tangenten der $C_I^{(4)}$ in den Punkten $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}_1$ über, und die beiden übrigen Gegenseiten fallen in die Sekante $|\mathfrak{P}\mathfrak{P}_1|$ zusammen. Nennen wir $t_{\mathfrak{P}}$ und $t_{\mathfrak{P}_1}$ die Tangenten in $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}_1$ an der $C_I^{(4)}$, so sehen wir, daß $[t_{\mathfrak{P}}\mathfrak{P}_1]$ die Schmiegungsebene der $C_I^{(4)}$ im Punkte $\mathfrak{P}$, und ebenso die Ebene $[t_{\mathfrak{P}_1}\mathfrak{P}]$ die Schmiegungsebene der $C_I^{(4)}$ im Punkte $\mathfrak{P}_1$ ist. Die beiden Punkte $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}_1$ besitzen also die ausgezeichnete Eigenschaft, daß die Schmiegungsebene eines jeden derselben durch den andern geht. Die Tangenten $t_{\mathfrak{P}}$ und $t_{\mathfrak{P}_1}$ sind Erzeugende derselben Regelschar des Hyperboloids $\mathfrak{H}_1^{(2)}$. Die beiden andern Punkte $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{Q}_1$, in welchen Erzeugende derselben Regelschar, welcher $t_{\mathfrak{P}}$ und $t_{\mathfrak{P}_1}$ angehören, das Hyperboloid berühren, müssen dieselbe Eigenschaft besitzen. Wir erhalten also in den Berührungspunkten der Erzeugenden aus der einen Regelschar des Hyperboloids $\mathfrak{H}_1^{(2)}$ zwei solche ausgezeichnete Punktepaare, und ebenso in den Berührungspunkten der Erzeugenden aus der zweiten Regelschar des Hyperboloids $\mathfrak{H}_1^{(2)}$ zwei andere derartige Punktepaare, und da es sechs solche Hyperboloide $\mathfrak{H}_i^{(2)}$ $(i = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$ giebt, erhalten wir im ganzen 24 Punktepaare von der angegebenen Art. Wir können also das Resultat unserer Untersuchung folgendermaßen zusammenstellen:

Es giebt auf der Raumkurve $C_I^{(4)}$ im allgemeinen 24 Punktepaare der Art, daß für jedes Paar die Schmiegungsebene des einen Punktes durch den andern geht und umgekehrt. Diese 24 Punktepaare gruppieren sich zu je zweien so, daß diese beiden

Punktepaare ein Punktquadrupel der $C_I^{(4)}$ bilden; man erhält dadurch 12 Punktquadrupel, die wiederum paarweise so zusammentreten, daß die acht Tangenten der $C_I^{(4)}$ in diesen Punkten den beiden Regelscharen eines und desselben Hyperboloids angehören, welches durch die ganze $C_I^{(4)}$ geht; man erhält dadurch sechs Hyperboloide in dem Flächenbüschel, dessen Grundkurve die angegebene $C_I^{(4)}$ ist; jedes dieser sechs Hyperboloide hat die besondere Eigenschaft, eine Schar von unendlich vielen windschiefen Vierseiten zu besitzen, welche auf dem Hyperboloid verlaufen und gleichzeitig der $C_I^{(4)}$ einbeschrieben sind, d. h. ihre Ecken auf der $C_I^{(4)}$ haben und zu ihren beiden Paaren von Gegenseiten Erzeugende aus den beiden Regelscharen des Hyperboloids besitzen.*

§ 11. Die sechszehn Wendeberührungspunkte der $C_I^{(4)}$ und ihre Verteilung zu je vieren in Ebenen.

Die Schmiegungsebene in einem beliebigen Punkte der $C_I^{(4)}$ schneidet dieselbe im allgemeinen noch in einem vierten Punkte, dem zu dem angenommenen gehörigen Schmiegungspunkte (Seite 14). Es kann nach solchen besonderen Punkten der $C_I^{(4)}$ gefragt werden, deren zugehöriger Schmiegungspunkt mit dem Berührungspunkte zusammenfällt, oder was dasselbe sagt, nach solchen Ebenen, welche mit der $C_I^{(4)}$ vier zusammenfallende Punkte gemein haben. Diese heißen „Wendeberührungsebenen“, und ihre Berührungspunkte „Wendeberührungspunkte“. Diese sind aber nichts anderes, als die Schnittpunkte der $C_I^{(4)}$ mit den Ebenen des Polartetraëders $\mathfrak{O}_1\mathfrak{O}_2\mathfrak{O}_3\mathfrak{O}_4$. Denn jeder dieser Punkte, z. B. $\mathfrak{O}_1$, ist Mittelpunkt eines Kegels zweiter Ordnung, welcher durch die ganze $C_I^{(4)}$ geht (S. 54), also schneidet jeder durch $\mathfrak{O}_1$ gehende Kegelstrahl des Kegels $\mathfrak{O}_1^{(2)}$ die $C_I^{(4)}$ im allgemeinen in zwei

* Diese sechs Hyperboloide in dem Büschel sind die einzigen, welche diese Eigenschaft besitzen. (Wir kommen später (S. 91) noch von anderer Seite auf diese sechs ausgezeichneten Hyperboloide zurück.)

Punkten die harmonisch getrennt werden durch $\mathfrak{O}_1$ und den Schnittpunkt mit der Ebene $\varpi_1 = [\mathfrak{O}_2\mathfrak{O}_3\mathfrak{O}_4]$. Ziehen wir aber durch $\mathfrak{O}_1$ insbesondere einen solchen Kegelstrahl von $\mathfrak{O}_1^{(2)}$, welcher nach einem der vier Schnittpunkte $\mathfrak{P}$ der $C_I^{(4)}$ mit der Ebene ϖ_1 hingeht, so muß dieser Kegelstrahl Tangente im Punkte $\mathfrak{P}$ der $C_I^{(4)}$ sein, weil, wenn von vier harmonischen Punkten der eine des einen Paares zugeordneter Punkte in den dritten Punkt hineinfällt, auch der andere in denselben hineinfallen muß. Wir haben also zunächst den Satz:

Schneidet man die $C_I^{(4)}$ mit einer der vier Seitenflächen des Polartetraëders, so gehen die Tangenten in den vier Schnittpunkten durch die der Seitenfläche gegenüberliegende Ecke des Polartetraëders.

Ist demgemäß $|\mathfrak{P}\mathfrak{O}_1|$ die Tangente in $\mathfrak{P}$, so muß jede durch $|\mathfrak{P}\mathfrak{O}_1|$ gelegte Ebene den Kegel $\mathfrak{O}_1^{(2)}$ noch in einem zweiten Strahl schneiden, der im allgemeinen der $C_I^{(4)}$ in zwei Punkten begegnet; für die besondere Ebene indessen, welche längs des Kegelstrahls $|\mathfrak{O}_1\mathfrak{P}|$ den Kegel $\mathfrak{O}_1^{(2)}$ berührt, müssen, da der zweite Kegelstrahl mit dem ersten zusammenfällt, auch seine beiden Schnittpunkte mit der $C_I^{(4)}$ in dem Punkte $\mathfrak{P}$ zusammenfallen. Die Berührungsebene am Kegel $\mathfrak{O}_1^{(2)}$ längs des Kegelstrahls $|\mathfrak{O}_1\mathfrak{P}|$ hat daher in $\mathfrak{P}$ vier zusammenfallende Punkte mit der $C_I^{(4)}$ gemein, ist also eine Wendeberührungsebene der $C_I^{(4)}$, und der Punkt $\mathfrak{P}$ ist ein Wendeberührungspunkt. Wir schließen:

Die Raumkurve $C_I^{(4)}$ hat im allgemeinen 16 Wendeberührungsebenen (oder stationäre Schmiegungsebenen, die vierpunktig berühren); die Berührungspunkte derselben sind die 16 Schnittpunkte der $C_I^{(4)}$ mit den vier Seitenflächen des Polartetraëders $\mathfrak{O}_1\mathfrak{O}_2\mathfrak{O}_3\mathfrak{O}_4$.*

Die 16 Wendeberührungspunkte liegen also zunächst, wie wir unmittelbar sehen, zu je vieren in den vier Seitenflächen des Polartetraëders; sie verteilen sich aber noch auf mehrfache andere Weise zu je vier in neuen Ebenen. Denn seien

* Daß keine weiteren Wendeberührungspunkte vorkommen können, ist leicht einzusehen. (Seite 100, Anmerkung.)

die vier Schnittpunkte der $C_1^{(4)}$ mit der Ebene $\varpi_1 = [\mathfrak{O}_2 \mathfrak{O}_3 \mathfrak{O}_4]$ für den Augenblick durch $\mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2 \mathfrak{P}_3 \mathfrak{P}_4$ bezeichnet, so sind nicht allein die Tangenten in diesen, wie wir gesehen haben, die vier Strahlen $|\mathfrak{P}_1 \mathfrak{O}_1|$ $|\mathfrak{P}_2 \mathfrak{O}_1|$ $|\mathfrak{P}_3 \mathfrak{O}_1|$ $|\mathfrak{P}_4 \mathfrak{O}_1|$, Kegelstrahlen des Kegels $\mathfrak{O}_1^{(2)}$, sondern, da auch die Kegel $\mathfrak{O}_2^{(2)}$ $\mathfrak{O}_3^{(2)}$ $\mathfrak{O}_4^{(2)}$ durch die ganze $C_I^{(4)}$ gehen, muß auch der Strahl $|\mathfrak{P}_1 \mathfrak{O}_2|$ der $C_I^{(4)}$ noch in einem zweiten Punkte der $C_I^{(4)}$ begegnen, der nur einer der drei übrigen Punkte $\mathfrak{P}_2 \mathfrak{P}_3 \mathfrak{P}_4$ sein kann, da es keine andern Kurvenpunkte in der Ebene ϖ_1 giebt, und dasselbe gilt für die Strahlen $|\mathfrak{P}_1 \mathfrak{O}_3|$ $|\mathfrak{P}_1 \mathfrak{O}_4|$ $|\mathfrak{P}_2 \mathfrak{O}_2|$ und so weiter, d. h. mit andern Worten:

Die vier Punkte, in welchen eine Seitenfläche des Polartetraëders der $C_I^{(4)}$ begegnet, bilden ein vollständiges Viereck, dessen drei Diagonalpunkte diejenigen drei Ecken des Polartetraëders sind, welche in jener Seitenfläche liegen.

Nun gehen durch den Punkt $\mathfrak{O}_1$ nicht allein die vier Tangenten $|\mathfrak{O}_1 \mathfrak{P}_1|$ $|\mathfrak{O}_1 \mathfrak{P}_2|$ $|\mathfrak{O}_1 \mathfrak{P}_3|$ $|\mathfrak{O}_1 \mathfrak{P}_4|$ in den vier Punkten $\mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2 \mathfrak{P}_3 \mathfrak{P}_4$, sondern es kreuzt sich auch in $\mathfrak{O}_1$ ein Seitenpaar des vollständigen Vierecks, welches in der Ebene $[\mathfrak{O}_1 \mathfrak{O}_2 \mathfrak{O}_3]$ von ihren vier Schnittpunkten mit der $C_I^{(4)}$ gebildet wird, und ebenso ein Seitenpaar des vollständigen Vierecks in der Ebene $[\mathfrak{O}_1 \mathfrak{O}_2 \mathfrak{O}_4]$ und endlich auch ein Seitenpaar des vollständigen Vierecks in der Ebene $[\mathfrak{O}_1 \mathfrak{O}_3 \mathfrak{O}_4]$; folglich gehen durch $\mathfrak{O}_1$ sechs Strahlen, deren jeder zwei Wendeberührungspunkte enthält, und vier Strahlen, deren jeder eine Tangente in einem Wendeberührungspunkte ist. Wir schließen hieraus:

Jede Tangente in einem Wendeberührungspunkte der $C_I^{(4)}$ liegt sechsmal mit zwei anderen Wendeberührungspunkten in je einer Ebene.

Da ferner durch den Punkt $\mathfrak{O}_1$ sechs Strahlen gehen, deren jeder zwei Wendeberührungspunkte der $C_I^{(4)}$ enthält, und diese sechs Strahlen auf $\frac{6 \,.\, 5}{1 \,.\, 2} = 15$ Arten zu je zweien durch eine Ebene verbunden werden können, die also vier getrennt liegende Wendeberührungspunkte enthält, und da

dasselbe für $\mathfrak{O}_2\mathfrak{O}_3\mathfrak{O}_4$ gilt, so erhalten wir zunächst $15.4 = 60$ derartige Ebenen; unter diesen kommt aber jede der vier Polartetraëderebenen dreimal vor, weil sie drei von den vier Ecken $\mathfrak{O}_1\mathfrak{O}_2\mathfrak{O}_3\mathfrak{O}_4$ enthält; lassen wir also diese vier Polartetraëderebenen überhaupt fort, so erhalten wir $60 - 12 = 48$ neue Ebenen, deren jede vier getrennt liegende Wendeberührungspunkte der $C_I^{(4)}$ enthält.

Außerdem liegen aber die 16 Wendeberührungspunkte noch auf andere Weise zu je vieren in einer Ebene, denn nach dem oben bewiesenen Reye'schen Satze (S. 46) liegen die vier Schmiegungspunkte zu vier Punkten, in denen eine beliebige Ebene der $C_I^{(4)}$ begegnet, selbst wieder in einer neuen Ebene; legen wir also durch irgend drei Wendeberührungspunkte eine Ebene, die nur noch in einem einzigen vierten Punkte der $C_I^{(4)}$ begegnen kann, so liegen die drei zugehörigen Schmiegungspunkte, die mit den drei ersten Punkten bez. zusammenfallen, in einer Ebene, die auch den zu dem vierten Punkte gehörigen Schmiegungspunkt enthalten muß; also muß auch dieser ein Wendeberührungspunkt sein, d. h.:

Jede Ebene, die durch drei von den 16 Wendeberührungspunkten der $C_I^{(4)}$ gelegt wird, muß auch noch in einem vierten Wendeberührungspunkte die $C_I^{(4)}$ durchschneiden.

Wir haben nun außer den vier Seitenflächen des Polartetraëders, deren jede vier Wendeberührungspunkte enthält, noch 48 Ebenen kennen gelernt, deren jede zwei Wendeberührungspunkte aus einer und zwei aus einer anderen Polartetraëderebene enthält, und umgekehrt muß jede Ebene, die zwei Wendeberührungspunkte aus einer Polartetraëderebene mit einem Wendeberührungspunkte aus einer andern Polartetraëderebene verbindet, noch einen zweiten Wendeberührungspunkt der letzteren enthalten, denn sie muß eben eine jener 48 Ebenen sein. Wir können aber auch aus drei verschiedenen Polartetraëderebenen je einen Wendeberührungspunkt entnehmen und solche drei durch eine Ebene verbinden, dann muß dieselbe noch einen vierten Wende-

berührungspunkt enthalten, der notwendig in der vierten Polartetraëderebene liegen muß.

Wir erhalten hierdurch 64 neue Ebenen, deren jede je einen Wendeberührungspunkt aus den vier verschiedenen Polartetraëderebenen enthält; denn die vier Wendeberührungspunkte in einer Polartetraëderebene lassen sich mit den vieren in einer zweiten durch 16 Strahlen verbinden, und jeder dieser 16 Strahlen läßt sich mit einem der vier Wendeberührungspunkte in der dritten Polartetraëderebene durch eine Ebene verbinden, die dann drei Wendeberührungspunkte aus drei verschiedenen Polartetraëderebenen enthält, und deren es also $16 . 4 = 64$ Ebenen giebt; jede derselben muß dann noch in einem vierten Wendeberührungspunkte der $C_I^{(4)}$ begegnen, der notwendig in der vierten Polartetraëderebene liegt.

Wir erhalten also das Gesamtresultat:

Die 16 Wendeberührungspunkte der $C_I^{(4)}$ liegen zu je vieren in

$$4 + 48 + 64 = 116$$

Ebenen, von denen die ersten vier die Seitenflächen des Polartetraëders sind, die zweiten 48 zu je zwölf durch die Ecken des Polartetraëders gehen und immer zwei Wendeberührungspunkte aus einer Polartetraëderebene mit zweien aus einer andern verbinden, die dritten 64 Ebenen allemal vier Wendeberührungspunkte enthalten, die in vier verschiedenen Seitenflächen des Polartetraëders liegen.*

Wir wollen nun die vier Wendeberührungspunkte in der Ebene $\varpi_1 = [\mathfrak{O}_2 \mathfrak{O}_3 \mathfrak{O}_4]$ des Polartetraëders durch

$$1_1 \; 1_2 \; 1_3 \; 1_4$$

bezeichnen; dieselben bilden ein vollständiges Viereck, dessen drei Diagonalpunkte $\mathfrak{O}_2 \; \mathfrak{O}_3 \; \mathfrak{O}_4$ sein müssen. Ebenso bilden

* A. Harnack, Ueber die Darstellung der Raumkurve vierter Ordnung erster Species und ihres Sekantensystems durch doppeltperiodische Funktionen (Math. Ann. Bd. 12, S. 64).

E. Lange, Die sechszehn Wendeberührungspunkte der Raumkurve vierter Ordnung erster Species (Inaug.-Diss. Dresden 1882, auch Schlömilch's Ztschr. Jhrgg. 28).



in der Polartetraëderebene $\varpi_2 = [\mathfrak{O}_1\mathfrak{O}_3\mathfrak{O}_4]$ die vier Wendeberührungspunkte $2_1\ 2_2\ 2_3\ 2_4$ ein vollständiges Viereck, dessen drei Diagonalpunkte $\mathfrak{O}_1\mathfrak{O}_3\mathfrak{O}_4$ sein müssen; ferner in der Polartetraëderebene $\varpi_3 = [\mathfrak{O}_1\mathfrak{O}_2\mathfrak{O}_4]$ bilden die vier Wendeberührungspunkte

$$3_1\ 3_2\ 3_3\ 3_4$$

ein vollständiges Viereck, dessen drei Diagonalpunkte $\mathfrak{O}_1\mathfrak{O}_2\mathfrak{O}_4$ sein müssen, und endlich bilden in der Polartetraëderebene $\varpi_4 = [\mathfrak{O}_1\mathfrak{O}_2\mathfrak{O}_3]$ die vier Wendeberührungspunkte

$$4_1\ 4_2\ 4_3\ 4_4$$

ein vollständiges Viereck, dessen drei Diagonalpunkte $\mathfrak{O}_1\mathfrak{O}_2\mathfrak{O}_3$ sein müssen.

Von jedem dieser vier vollständigen Vierecke dürfen wir eine Ecke aus den in der Ebene liegenden vier Punkten beliebig bezeichnen, und da wir ferner wissen (Seite 84), daß notwendig die Verbindungsebene von drei in verschiedenen Polartetraëderebenen liegenden Wendeberührungspunkten auch durch einen vierten Wendeberührungspunkt gehen muß, der nur in der vierten Polartetraëderebene liegen kann, so dürfen wir, ohne dadurch eine Beschränkung einzuführen, die Bezeichnung so wählen, daß

$$1_1\ 2_1\ 3_1\ 4_1$$

in einer Ebene liegen.

Nun steht uns noch frei, in der Ebene $\varpi_1 = [\mathfrak{O}_2\mathfrak{O}_3\mathfrak{O}_4]$ von dem vollständigen Viereck, dessen eine Ecke 1_1 benannt ist, nachdem wir die drei Seiten des vollständigen Vierecks $|1_1\mathfrak{O}_2|\ |1_1\mathfrak{O}_3|\ |1_1\mathfrak{O}_4|$ gezogen haben, die drei übrigen Ecken auf denselben durch bez. $1_2 1_3 1_4$ zu bezeichnen, dann ist die Gegenseite von $|1_1 1_2|$ offenbar $|1_3 1_4|$ u. s. w., also

$$(1_1 1_2,\ 1_3 1_4) = \mathfrak{O}_2;\ (1_1 1_3,\ 1_2 1_4) = \mathfrak{O}_3;\ (1_1 1_4,\ 1_2 1_3) = \mathfrak{O}_4.$$

In der Ebene $\varpi_2 = [\mathfrak{O}_1\mathfrak{O}_3\mathfrak{O}_4]$ haben wir ein zweites vollständiges Viereck, von dem eine Ecke bereits mit 2_1 benannt ist, die drei übrigen Ecken müssen in den Seiten $|2_1\mathfrak{O}_1|\ |2_1\mathfrak{O}_4|\ |2_1\mathfrak{O}_3|$ liegen; wir wollen sie $2_2\ 2_3\ 2_4$ nennen, dann ist

$$(2_1 2_2,\ 2_3 2_4) = \mathfrak{O}_1;\ (2_1 2_3,\ 2_2 2_4) = \mathfrak{O}_4;\ (2_1 2_4,\ 2_2 2_3) = \mathfrak{O}_3.$$

Drittens haben wir in der Ebene $\varpi_3 = [\mathfrak{D}_1\mathfrak{D}_2\mathfrak{D}_4]$ ein vollständiges Viereck, von dem eine Ecke bereits mit 3_1 bezeichnet ist; die drei übrigen müssen in den Seiten $|3_1\mathfrak{D}_4|$ $|3_1\mathfrak{D}_1|$ $|3_1\mathfrak{D}_2|$ liegen; wir wollen sie $3_2\,3_3\,3_4$ nennen, dann ist

$$(3_1 3_2,\ 3_3 3_4) = \mathfrak{D}_4;\ (3_1 3_3,\ 3_2 3_4) = \mathfrak{D}_1;\ (3_1 3_4,\ 3_2 3_3) = \mathfrak{D}_2,$$

und endlich haben wir in der Ebene $\varpi_4 = [\mathfrak{D}_1\mathfrak{D}_2\mathfrak{D}_3]$ ein vollständiges Viereck, von dem eine Ecke bereits 4_1 genannt ist, und die drei übrigen in den Seiten $|4_1\mathfrak{D}_3|$ $|4_1\mathfrak{D}_2|$ $|4_1\mathfrak{D}_1|$ liegen müssen; bezeichnen wir dieselben mit $4_2\,4_3\,4_4$, so haben wir

$$(4_1 4_2,\ 4_3 4_4) = \mathfrak{D}_3;\ (4_1 4_3,\ 4_2 4_4) = \mathfrak{D}_2;\ (4_1 4_4,\ 4_2 4_3) = \mathfrak{D}_1.$$

Bei dieser Bezeichnung ergiebt sich, daß je 6 Strahlen:

durch $\mathfrak{D}_1$:	*		$\lvert 2_1 2_2\rvert$	$\lvert 2_3 2_4\rvert$	$\lvert 3_1 3_3\rvert$	$\lvert 3_4 3_2\rvert$	$\lvert 4_1 4_4\rvert$	$\lvert 4_2 4_3\rvert$
„ $\mathfrak{D}_2$:	$\lvert 1_1 1_2\rvert$	$\lvert 1_3 1_4\rvert$	*		$\lvert 3_1 3_4\rvert$	$\lvert 3_2 3_3\rvert$	$\lvert 4_1 4_3\rvert$	$\lvert 4_4 4_2\rvert$
„ $\mathfrak{D}_3$:	$\lvert 1_1 1_3\rvert$	$\lvert 1_4 1_2\rvert$	$\lvert 2_1 2_4\rvert$	$\lvert 2_2 2_3\rvert$	*		$\lvert 4_1 4_2\rvert$	$\lvert 4_3 4_4\rvert$
„ $\mathfrak{D}_4$:	$\lvert 1_1 1_4\rvert$	$\lvert 1_2 1_3\rvert$	$\lvert 2_1 2_3\rvert$	$\lvert 2_4 2_2\rvert$	$\lvert 3_1 3_2\rvert$	$\lvert 3_3 3_4\rvert$	*	

gehen, und außerdem gehen durch jeden dieser Punkte $\mathfrak{D}_1\mathfrak{D}_2\mathfrak{D}_3\mathfrak{D}_4$ noch die vier Tangenten in den Schnittpunkten der Gegenfläche des Tetraëders, nämlich

durch	$\mathfrak{D}_1$	gehen	$\lvert 1_1 1_1\rvert$	$\lvert 1_2 1_2\rvert$	$\lvert 1_3 1_3\rvert$	$\lvert 1_4 1_4\rvert$
„	$\mathfrak{D}_2$	„	$\lvert 2_1 2_1\rvert$	$\lvert 2_2 2_2\rvert$	$\lvert 2_3 2_3\rvert$	$\lvert 2_4 2_4\rvert$
„	$\mathfrak{D}_3$	„	$\lvert 3_1 3_1\rvert$	$\lvert 3_2 3_2\rvert$	$\lvert 3_3 3_3\rvert$	$\lvert 3_4 3_4\rvert$
„	$\mathfrak{D}_4$	„	$\lvert 4_1 4_1\rvert$	$\lvert 4_2 4_2\rvert$	$\lvert 4_3 4_3\rvert$	$\lvert 4_4 4_4\rvert$.

Da sich von den sechs Strahlen durch einen und denselben Punkt immer je zwei durch eine Ebene verbinden lassen, welche mithin vier Wendeberührungspunkte der $C_I^{(4)}$ enthalten wird, so erhalten wir außer den vier Seitenflächen des Polartetraëders, welche je vier Punkte enthalten,

$$(A)\quad \begin{cases} [1_1\ 1_2\ 1_3\ 1_4] \\ [2_1\ 2_2\ 2_3\ 2_4] \\ [3_1\ 3_2\ 3_3\ 3_4] \\ [4_1\ 4_2\ 4_3\ 4_4], \end{cases}$$

(und welche dreimal auftreten) folgende 48 Ebenen, die je vier Wendeberührungspunkte enthalten:

$$(B)\left\{\begin{array}{lll}
[1_1 1_3 2_1 2_4] & [1_1 1_4 3_1 3_2] & [1_1 1_2 4_1 4_3] \\
[1_1 1_3 2_2 2_3] & [1_1 1_4 3_3 3_4] & [1_1 1_2 4_2 4_4] \\
[1_2 1_4 2_1 2_4] & [1_2 1_3 3_1 3_2] & [1_3 1_4 4_1 4_3] \\
[1_2 1_4 2_2 2_3] & [1_2 1_3 3_3 3_4] & [1_3 1_4 4_2 4_4] \\
[1_1 1_4 2_1 2_3] & [1_1 1_2 3_1 3_4] & [1_1 1_3 4_1 4_2] \\
[1_1 1_4 2_2 2_4] & [1_1 1_2 3_2 3_3] & [1_1 1_3 4_3 4_4] \\
[1_2 1_3 2_1 2_3] & [1_3 1_4 3_1 3_4] & [1_2 1_4 4_1 4_2] \\
[1_2 1_3 2_2 2_4] & [1_3 1_4 3_2 3_3] & [1_2 1_4 4_3 4_4] \\
\hline
[3_1 3_3 4_1 4_4] & [4_1 4_4 2_1 2_2] & [2_1 2_2 3_1 3_3] \\
[3_1 3_3 4_2 4_3] & [4_1 4_4 2_3 2_4] & [2_1 2_2 3_2 3_4] \\
[3_2 3_4 4_1 4_4] & [4_2 4_3 2_1 2_2] & [2_3 2_4 3_1 3_3] \\
[3_2 3_4 4_2 4_3] & [4_2 4_3 2_3 2_4] & [2_3 2_4 3_2 3_4] \\
[3_1 3_4 4_1 4_3] & [4_1 4_2 2_1 2_4] & [2_1 2_3 3_1 3_2] \\
[3_1 3_4 4_2 4_4] & [4_1 4_2 2_2 2_3] & [2_1 2_3 3_3 3_4] \\
[3_2 3_3 4_1 4_3] & [4_3 4_4 2_1 2_4] & [2_2 2_4 3_1 3_2] \\
[3_2 3_3 4_2 4_4] & [4_3 4_4 2_2 2_3] & [2_2 2_4 3_3 3_4]\,.
\end{array}\right.$$

Zu diesen beiden Gruppen (A) und (B) tritt nun noch die dritte Gruppe von 64 Ebenen derart, daß in jeder vier Wendeberührungspunkte aus vier verschiedenen Polartetraëderebenen liegen; die Bezeichnung ist nun so gewählt, daß eine dieser 64 Ebenen diese ist:

$$[1_1\, 2_1\, 3_1\, 4_1];$$

aus dieser folgen alle übrigen; denn man kann, wenn man irgend drei aus verschiedenen Polartetraëderebenen entnommene Wendeberührungspunkte durch eine Ebene verbindet, allemal ihren vierten Schnittpunkt mit der $C_I^{(4)}$ auf lineare Weise ermitteln. Nehmen wir die Ebene $[1_1 2_1 3_1 4_1]$ und denken uns durch die Sekante $|1_1 2_1|$ und die Raumkurve das einzige Hyperboloid gelegt, so muß demselben die Gerade $|3_1 4_1|$ als Erzeugende der zweiten Regelschar angehören; da aber auch $3_1 4_1 3_3 4_4$ in einer Ebene liegen, und das durch $|3_1 4_1|$ und die Raumkurve gelegte Hyperboloid mit dem vorigen identisch ist, so muß auch $|3_3 4_4|$ eine Erzeugende der ersten Regelschar desselben Hyperboloids sein; da endlich auch $3_3 4_4 3_2 4_2$ in einer Ebene liegen,

und das durch $|3_3 4_4|$ und die Raumkurve gelegte Hyperboloid dasselbe bleibt, so muß auch $|3_2 4_2|$ eine Erzeugende der zweiten Regelschar desselben Hyperboloids sein; also da zwei Erzeugende verschiedener Regelscharen desselben Hyperboloids sich allemal begegnen, müssen die vier Punkte

$$1_1\ 2_1\ 3_2\ 4_2$$

in einer Ebene liegen; wir haben mithin eine neue Ebene aus der Schar der 64 gefunden.

Es liegen aber auch $3_2 4_2 3_4 4_3$ in einer Ebene, also gehören $|3_2 4_2|$ und $|3_4 4_3|$ verschiedenen Regelscharen desselben Hyperboloids an, und da auch $3_4 4_3 3_3 4_3$ in einer Ebene liegen, so gehören $|3_4 4_3|$ und $|3_3 4_3|$ verschiedenen Regelscharen desselben Hyperboloids an, also liegen

$$1_1\ 2_1\ 3_3\ 4_3$$

in einer neuen der 64 Ebenen. Endlich liegen auch $3_3 4_3 3_2 4_1$ in einer Ebene, also gehören $|3_3 4_3|$ und $|3_2 4_1|$ verschiedenen Regelscharen desselben Hyperboloids an, und da auch $3_2 4_1 3_4 4_4$ in einer Ebene liegen, so gehören $|3_2 4_1|$ und $|3_4 4_4|$ verschiedenen Regelscharen desselben Hyperboloids an, also müssen auch

$$1_1\ 2_1\ 3_4\ 4_4$$

in einer Ebene liegen, die zu der Gruppe der 64 gehört; wir sehen zugleich, daß die vier Geraden

$$|3_1 4_1| \quad |3_2 4_2| \quad |3_3 4_3| \quad |3_4 4_4|$$

derselben Regelschar eines Hyperboloids angehören, welches durch die Sekante $|1_1 2_1|$ und die Raumkurve $C_I^{(4)}$ gelegt wird, und dessen anderer Regelschar die Sekante $|1_1 2_1|$ angehört. Ebenso finden wir, daß die vier Strahlen

$$|2_1 4_1| \quad |2_2 4_2| \quad |2_3 4_3| \quad |2_4 4_4|$$

derselben Regelschar eines Hyperboloids angehören, welches durch die Sekante $|1_1 3_1|$ und die Raumkurve $C_I^{(4)}$ gelegt wird, und daß diese den ersten 4 Erzeugenden gleichzeitig begegnet.

Fahren wir in dieser Weise zu schließen fort, so erhalten wir die folgende Gruppe (C) der 64 übrigen Ebenen, deren jede vier Wendeberührungspunkte aus vier verschiedenen Polartetraëderebenen enthält:



$$(C)\left\{\begin{array}{llll}
[1_1 2_1 3_1 4_1] & [1_1 2_1 3_2 4_2] & [1_1 2_1 3_3 4_3] & [1_1 2_1 3_4 4_4] \\
[1_1 2_2 3_1 4_2] & [1_1 2_2 3_2 4_1] & [1_1 2_2 3_3 4_4] & [1_1 2_2 3_4 4_3] \\
[1_1 2_3 3_1 4_3] & [1_1 2_3 3_2 4_4] & [1_1 2_3 3_3 4_1] & [1_1 2_3 3_4 4_2] \\
[1_1 2_4 3_1 4_4] & [1_1 2_4 3_2 4_3] & [1_1 2_4 3_3 4_2] & [1_1 2_4 3_4 4_1] \\
[1_2 2_1 3_1 4_2] & [1_2 2_1 3_2 4_1] & [1_2 2_1 3_3 4_4] & [1_2 2_1 3_4 4_3] \\
[1_2 2_2 3_1 4_1] & [1_2 2_2 3_2 4_2] & [1_2 2_2 3_3 4_3] & [1_2 2_2 3_4 4_4] \\
[1_2 2_3 3_1 4_4] & [1_2 2_3 3_2 4_3] & [1_2 2_3 3_3 4_2] & [1_2 2_3 3_4 4_1] \\
[1_2 2_4 3_1 4_3] & [1_2 2_4 3_2 4_4] & [1_2 2_4 3_3 4_1] & [1_2 2_4 3_4 4_2] \\
[1_3 2_1 3_1 4_3] & [1_3 2_1 3_2 4_4] & [1_3 2_1 3_3 4_1] & [1_3 2_1 3_4 4_2] \\
[1_3 2_2 3_1 4_4] & [1_3 2_2 3_2 4_3] & [1_3 2_2 3_3 4_2] & [1_3 2_2 3_4 4_1] \\
[1_3 2_3 3_1 4_1] & [1_3 2_3 3_2 4_2] & [1_3 2_3 3_3 4_3] & [1_3 2_3 3_4 4_4] \\
[1_3 2_4 3_1 4_2] & [1_3 2_4 3_2 4_1] & [1_3 2_4 3_3 4_4] & [1_3 2_4 3_4 4_3] \\
[1_4 2_1 3_1 4_4] & [1_4 2_1 3_2 4_3] & [1_4 2_1 3_3 4_2] & [1_4 2_1 3_4 4_1] \\
[1_4 2_2 3_1 4_3] & [1_4 2_2 3_2 4_4] & [1_4 2_2 3_3 4_1] & [1_4 2_2 3_4 4_2] \\
[1_4 2_3 3_1 4_2] & [1_4 2_3 3_2 4_1] & [1_4 2_3 3_3 4_4] & [1_4 2_3 3_4 4_3] \\
[1_4 2_4 3_1 4_1] & [1_4 2_4 3_2 4_2] & [1_4 2_4 3_3 4_3] & [1_4 2_4 3_4 4_4].
\end{array}\right.$$

Werfen wir noch einen Blick auf die drei Gruppen (A), (B), (C), so sehen wir, daß in der Gruppe (A) durch jeden Punkt nur eine ihrer Ebenen geht, in der Gruppe (B) durch jeden Punkt 12 ihrer Ebenen gehen, und in der Gruppe (C) durch jeden Punkt 16 ihrer Ebenen gehen. Auch zeigt sich, daß die je acht Geraden

$$\begin{array}{cccccccc}
|1_1 2_1| & |1_2 2_2| & |1_3 2_3| & |1_4 2_4| & |3_1 4_2| & |3_2 4_1| & |3_3 4_4| & |3_4 4_3| \\
|1_1 2_2| & |1_2 2_1| & |1_3 2_4| & |1_4 2_3| & |3_1 4_1| & |3_2 4_2| & |3_3 4_3| & |3_4 4_4|
\end{array}$$

den beiden Regelscharen eines und desselben durch die $C_I^{(4)}$ gehenden Hyperboloids angehören, weil jede von den ersten acht Geraden jeder der andern acht begegnet. Auf diesem Hyperboloid verlaufen nun die vier windschiefen Vierseite:

$$1_1 2_1 1_2 2_2, \quad 1_3 2_3 1_4 2_4, \quad 3_1 4_2 3_2 4_1, \quad 3_3 4_4 3_4 4_3,$$

folglich muß eine ganze Schar solcher auf dem Hyperboloid verlaufenden und der $C_I^{(4)}$ einbeschriebenen windschiefen Vierseite vorhanden sein, und das Hyperboloid muß eines jener sechs ausgezeichneten Hyperboloide sein, welche allein diese Eigenschaft besitzen (Seite 73); in der That finden wir diese

sechs Hyperboloide als bestimmt durch je acht Erzeugende aus den beiden Regelscharen, nämlich:

$$\mathfrak{H}_1^{(2)} \begin{cases} |1_1 2_1| & |1_2 2_2| & |1_3 2_3| & |1_4 2_4| & |3_1 4_2| & |3_2 4_1| & |3_3 4_4| & |3_4 4_3| \\ |1_1 2_2| & |1_2 2_1| & |1_3 2_4| & |1_4 2_3| & |3_1 4_1| & |3_2 4_2| & |3_3 4_3| & |3_4 4_4| \end{cases}$$

$$\mathfrak{H}_2^{(2)} \begin{cases} |1_1 2_4| & |1_2 2_3| & |1_3 2_2| & |1_4 2_1| & |3_1 4_3| & |3_2 4_4| & |3_3 4_1| & |3_4 4_2| \\ |1_1 2_3| & |1_2 2_4| & |1_3 2_1| & |1_4 2_2| & |3_1 4_4| & |3_2 4_3| & |3_3 4_2| & |3_4 4_1| \end{cases}$$

$$\mathfrak{H}_3^{(2)} \begin{cases} |1_1 3_1| & |1_2 3_2| & |1_3 3_3| & |1_4 3_4| & |2_1 4_3| & |2_2 4_4| & |2_3 4_1| & |2_4 4_2| \\ |1_1 3_3| & |1_2 3_4| & |1_3 3_1| & |1_4 3_2| & |2_1 4_1| & |2_2 4_2| & |2_3 4_3| & |2_4 4_4| \end{cases}$$

$$\mathfrak{H}_4^{(2)} \begin{cases} |1_1 3_2| & |1_2 3_1| & |1_3 3_4| & |1_4 3_3| & |2_1 4_4| & |2_2 4_3| & |2_3 4_2| & |2_4 4_1| \\ |1_1 3_4| & |1_2 3_3| & |1_3 3_2| & |1_4 3_1| & |2_1 4_2| & |2_2 4_1| & |2_3 4_4| & |2_4 4_3| \end{cases}$$

$$\mathfrak{H}_5^{(2)} \begin{cases} |1_1 4_1| & |1_2 4_2| & |1_3 4_3| & |1_4 4_4| & |2_1 3_4| & |2_2 3_3| & |2_3 3_2| & |2_4 3_1| \\ |1_1 4_4| & |1_2 4_3| & |1_3 4_2| & |1_4 4_1| & |2_1 3_1| & |2_2 3_2| & |2_3 3_3| & |2_4 3_4| \end{cases}$$

$$\mathfrak{H}_6^{(2)} \begin{cases} |1_1 4_3| & |1_2 4_4| & |1_3 4_1| & |1_4 4_2| & |2_1 3_2| & |2_2 3_1| & |2_3 3_4| & |2_4 3_3| \\ |1_1 4_2| & |1_2 4_1| & |1_3 4_4| & |1_4 4_3| & |2_1 3_3| & |2_2 3_4| & |2_3 3_1| & |2_4 3_2|. \end{cases}$$

Wir können also folgendes Resultat aussprechen:

Die 96 Strahlen, welche je einen Wendeberührungspunkt in einer Polartetraëderebene mit einem zweiten in einer andern Polartetraëderebene verbinden, gruppieren sich auf sechs Arten zu je 16, sodaß diese 16 Strahlen auf einem Hyperboloid liegen und zu achten den beiden Regelscharen dieses Hyperboloids angehören; die dadurch erhaltenen sechs Hyperboloide sind diejenigen ausgezeichneten aus dem Büschel, dessen Grundkurve die $C_I^{(4)}$ ist, zu denen wir in § 10 (S. 73) auf anderem Wege gelangt sind.

Da man von jedem der vier Kegel $\mathfrak{D}_1^{(2)}$ $\mathfrak{D}_2^{(2)}$ $\mathfrak{D}_3^{(2)}$ $\mathfrak{D}_4^{(2)}$, welche durch die $C_I^{(4)}$ gehen, zehn Strahlen hat, nämlich sechs, welche in zwei getrennten Punkten der $C_I^{(4)}$ begegnen, und vier, welche sie berühren, so kann man längs der letzteren die Berührungsebenen der Kegel mittelst des Pascal'schen Satzes konstruieren; diese sind dann die Schmiegungsebenen der $C_I^{(4)}$ in den Wendeberührungspunkten oder die

Wendeberührungsebenen, d. h. diejenigen Ebenen, welche die $C_I^{(4)}$ vierpunktig berühren.

§ 12. Tetraëder, deren Seitenflächen sämtliche Wendeberührungspunkte der $C_I^{(4)}$ zu je vieren enthalten.

Die vier Seitenflächen des Polartetraëders enthalten zu je vieren sämtliche sechszehn Wendeberührungspunkte der $C_I^{(4)}$; aus den gefundenen 116 Ebenen (S. 85), deren jede vier Wendeberührungspunkte enthält, lassen sich aber noch in verschiedener Weise Tetraëder zusammenstellen, welche die gleiche Eigenschaft besitzen, in ihren vier Seitenflächen sämtliche Wendeberührungspunkte zu je vieren zu enthalten. Wir unterscheiden hierbei folgende Fälle:

1. Nehmen wir zur Bildung eines Tetraëders zwei Polartetraëderebenen d. h. Ebenen aus der Gruppe (A), was auf 6 Arten geschehen kann, z. B.:

$$1_1 1_2 1_3 1_4$$
$$2_1 2_2 2_3 2_4,$$

so können die übrigen beiden Tetraëderebenen nur aus der Gruppe (B) und zwar nur auf folgende vier Arten entnommen werden, da durch die dritte Ebene die vierte schon bestimmt wird,

$$3_1 3_3 4_1 4_4, \quad 3_1 3_3 4_2 4_3, \quad 3_1 3_4 4_1 4_3, \quad 3_1 3_4 4_2 4_4$$
$$3_2 3_4 4_2 4_3, \quad 3_2 3_4 4_1 4_4, \quad 3_2 3_3 4_2 4_4, \quad 3_2 3_3 4_1 4_3;$$

wir erhalten also im ganzen $6 \cdot 4 = 24$ Tetraëder der verlangten Art, bei denen zwei Seitenflächen aus der Gruppe (A) und zwei aus der Gruppe (B) entnommen sind.

Zu zwei Seitenflächen aus der Gruppe (A) kann aber niemals eine aus der Gruppe (C) als dritte hinzutreten, weil sonst ein Punkt in zwei Tetraëderflächen gleichzeitig vorkäme.

2. Nehmen wir zur Bildung eines Tetraëders nur eine Ebene aus der Gruppe (A) (Polartetraëderebene) heraus, was auf vier Arten geschehen kann, z. B.:

$$1_1 1_2 1_3 1_4,$$

so können die übrigen drei Tetraëderebenen aus der Gruppe (B) und zwar auf acht Arten entnommen werden, nämlich:



$2_1 2_2 3_1 3_3$	$2_1 2_2 3_1 3_3$	$2_1 2_2 3_4 3_2$	$2_1 2_2 3_4 3_2$
$3_4 3_2 4_1 4_4$	$3_4 3_2 4_2 4_3$	$3_1 3_3 4_2 4_3$	$3_1 3_3 4_1 4_4$
$\underline{4_2 4_3 2_3 2_4}$	$\underline{4_1 4_4 2_3 2_4}$	$\underline{4_1 4_4 2_3 2_4}$	$\underline{4_2 4_3 2_3 2_4}$
$2_3 2_4 3_1 3_3$	$2_3 2_4 3_4 3_2$	$2_3 2_4 3_4 3_2$	$2_3 2_4 3_1 3_3$
$3_4 3_2 4_2 4_3$	$3_1 3_3 4_2 4_3$	$3_1 3_3 4_1 4_4$	$3_4 3_2 4_1 4_4$
$\underline{4_1 4_4 2_1 2_2}$	$\underline{4_1 4_4 2_1 2_2}$	$\underline{4_2 4_3 2_1 2_2}$	$\underline{4_2 4_3 2_1 2_2}$,

da andere Verbindungen keine Tetraëder der verlangten Art liefern, wie aus der Tabelle (B) folgt. Wir haben also im ganzen $4 . 8 = 32$ Tetraëder der verlangten Art, bei denen eine Seitenfläche aus der Gruppe (A) und drei aus der Gruppe (B) entnommen sind.

Zu einer Seitenfläche aus der Gruppe (A) kann aber niemals eine aus der Gruppe (C) als zweite hinzutreten, weil sonst ein Punkt in zwei Tetraëderflächen gleichzeitig aufträte.

3. Nehmen wir nun zur Bildung eines Tetraëders alle vier Seitenflächen aus der Gruppe (B), so ergiebt sich die Anzahl der Tetraëder durch folgende Betrachtung. Da allemal in einer Seitenfläche des Tetraëders der Punkt 1_1 vorkommen muß, so nehmen wir aus der Tabelle (B) zunächst eine Ebene, die diesen Punkt enthält, z. B.

$$1_1 1_2 3_1 3_4 .$$

Solcher Ebenen giebt es zwölf, wie die Tabelle (B) zeigt. Als zweite Tetraëderebene nehmen wir eine, welche die Punkte $1_3 1_4$ enthalten muß, dann dürfen wir aus (B) nur entnehmen entweder

$$1_3 1_4 3_2 3_3 \quad \text{oder} \quad 1_3 1_4 4_1 4_3 \quad \text{oder} \quad 1_3 1_4 4_4 4_2 ;$$

die dritte Tetraëderebene müßte im zweiten dieser drei Fälle die Punkte $4_2 4_4$ und keinen der früheren enthalten; solche Ebenen giebt es aber keine weiter in (B) außer $3_2 3_3 4_4 4_2$, die aber auszuschließen ist; da der dritte Fall aus gleichen Gründen auszuschließen ist, so bleibt nur der erste Fall übrig, in welchem die beiden ersten Tetraëderebenen sind:

$$1_1 1_2 3_1 3_4$$
$$1_3 1_4 3_2 3_3 .$$



Als dritte Tetraëderebene ist dann noch zu wählen übrig entweder

$2_1 2_2 4_1 4_4$ oder $2_1 2_2 4_2 4_3$ oder $2_2 2_3 4_1 4_2$ oder $2_2 2_3 4_3 4_4$,

und die vierte Tetraëderebene ist dann vollständig bestimmt, nämlich:

$2_3 2_4 4_2 4_3$ oder $2_3 2_4 4_1 4_4$ oder $2_1 2_4 4_3 4_4$ oder $2_1 2_4 4_1 4_2$,

die ebenfalls der Gruppe (B) angehören; diese acht Ebenen gruppieren sich also paarweise als dritte und vierte Tetraëderebene, aus (B) entnommen. Da wir also nur vier verschiedene Tetraëder erhalten, so giebt es im ganzen $12 . 4 = 48$ Tetraëder der verlangten Art, deren vier Seitenflächen sämtlich aus der Gruppe (B) zu entnehmen sind.

4. Sollen zur Bildung eines Tetraëders sämtliche vier Seitenflächen aus der Gruppe (C) entnommen werden, so muß jedenfalls in einer Tetraëderebene der Punkt 1_1 vorkommen; solcher Ebenen giebt es aber in der Gruppe (C) sechszehn, und es ist klar, daß dasselbe, was für eine dieser 16 Ebenen gilt, auch für jede andere derselben gelten muß; denn wir haben aus einer alle übrigen 63 auf unzweideutige Weise abgeleitet; die Wahl der ersten aus den 64 Ebenen war aber willkürlich; ist dieselbe einmal festgelegt, so sind alle übrigen dadurch mitbestimmt, und wenn wir aus diesen jetzt eine andere als erste wählen, so muß dieselbe Gruppe (C) erhalten werden. Wir brauchen daher nur eine beliebige von den 16 Ebenen aus der Gruppe (C), welche 1_1 enthalten, herauszunehmen und mit ihr die Tetraëder der verlangten Art zu bilden, dann können wir überzeugt sein, daß eine gleiche Anzahl Tetraëder sich auch mit jeder der übrigen 15 Ebenen als erster Tetraëderebene wird bilden lassen. Haben wir die Anzahl der Tetraëder für eine jener 16 Ebenen ermittelt, so liefert also das Sechszehnfache derselben die Anzahl sämtlicher zu bildenden Tetraëder von der verlangten Art.

Nehmen wir als erste Tetraëderebene

$$1_1 2_1 3_1 4_1,$$

so muß eine zweite Tetraëderebene jedenfalls den Punkt 1_2

enthalten; solcher Ebenen aus der Gruppe (C), die keinen der früheren Punkte enthalten, können aber nur folgende sieben genommen werden:

1) $1_2 2_2 3_2 4_2$
2) $1_2 2_2 3_3 4_3$
3) $1_2 2_3 3_2 4_3$
4) $1_2 2_3 3_3 4_2$
5) $1_2 2_2 3_4 4_4$
6) $1_2 2_4 3_2 4_4$
7) $1_2 2_4 3_4 4_2$.

Nehmen wir jetzt der Reihe nach als zweite Tetraëderebene eine dieser sieben Ebenen, so wird als dritte Tetraëderebene, die notwendig 1_3 enthalten muß, in jedem der sieben Fälle nur folgende genommen werden können:

ad 1) $1_3 2_3 3_3 4_3$, dann ist die vierte bestimmt
$\underline{1_4 2_4 3_4 4_4}$ und gehört auch der Gruppe (C) an,

oder $1_3 2_4 3_3 4_4$, dann ist die vierte
$\underline{1_4 2_3 3_4 4_3}$ und gehört auch der Gruppe (C) an,

oder $1_3 2_3 3_4 4_4$, dann ist die vierte
$\underline{1_4 2_4 3_3 4_3}$ und gehört auch der Gruppe (C) an,

oder $1_3 2_4 3_4 4_3$, dann ist die vierte
$\underline{1_4 2_3 3_3 4_4}$ und gehört auch der Gruppe (C) an,

es giebt also vier Tetraëder der verlangten Art;

ad 2) $1_3 2_3 3_2 4_2$, dann ist die vierte
$\underline{1_4 2_4 3_4 4_4}$ und gehört auch der Gruppe (C) an,

oder $1_3 2_3 3_4 4_4$, dann ist die vierte
$\underline{1_4 2_4 3_2 4_2}$ und gehört auch der Gruppe (C) an,

es giebt also nur zwei Tetraëder der verlangten Art;

ad 3) $1_3 2_2 3_3 4_2$, dann ist die vierte
$\underline{1_4 2_4 3_4 4_4}$ und gehört auch der Gruppe (C) an,

oder $1_3 2_4 3_3 4_4$, dann ist die vierte
$\underline{1_4 2_2 3_4 4_2}$ und gehört auch der Gruppe (C) an,

es giebt also auch nur zwei Tetraëder der verlangten Art;

ad 4) $1_3 2_2 3_2 4_3$, dann ist die vierte
$\underline{1_4 2_4 3_4 4_4}$ und gehört auch der Gruppe (C) an,
oder $1_3 2_4 3_4 4_3$, dann ist die vierte
$\underline{1_4 2_2 3_2 4_4}$ und gehört auch der Gruppe (C) an,
es giebt also nur zwei Tetraëder der verlangten Art;
ad 5) $1_3 2_3 3_3 4_3$, dann ist die vierte
$\underline{1_4 2_4 3_2 4_2}$ und gehört auch der Gruppe (C) an,
oder $1_3 2_3 3_2 4_2$, dann ist die vierte
$\underline{1_4 2_4 3_3 4_3}$ und gehört auch der Gruppe (C) an,
es giebt also nur zwei Tetraëder der verlangten Art;
ad 6) $1_3 2_3 3_3 4_3$, dann ist die vierte
$\underline{1_4 2_2 3_4 4_2}$ und gehört auch der Gruppe (C) an,
oder $1_3 2_2 3_3 4_2$, dann ist die vierte
$\underline{1_4 2_3 3_4 4_3}$ und gehört auch der Gruppe (C) an,
es giebt also nur zwei Tetraëder der verlangten Art;
ad 7) $1_3 2_2 3_2 4_3$, dann ist die vierte
$\underline{1_4 2_3 3_3 4_4}$ und gehört auch der Gruppe (C) an,
oder $1_3 2_3 3_3 4_3$, dann ist die vierte
$\underline{1_4 2_2 3_2 4_4}$ und gehört auch der Gruppe (C) an,
es giebt also nur zwei Tetraëder der verlangten Art.

Fassen wir jetzt alle sieben Fälle zusammen, so haben wir im ganzen 16 Tetraëder der verlangten Art, die sich bilden lassen, sobald die erste Tetraëderebene aus denjenigen 16 Ebenen der Gruppe (C) entnommen ist, welche 1_1 enthalten; nach der vorhergehenden Bemerkung giebt es also im ganzen $16 \,.\, 16 = 256$ Tetraëder der verlangten Art, bei denen sämtliche vier Seitenflächen aus der Gruppe (C) entnommen sind.

5. Es bleiben jetzt noch solche Tetraëder zu bilden übrig, deren Seitenflächen teils aus der Gruppe (B) und teils aus der Gruppe (C) entnommen werden. Wollten wir nur eine Tetraëderebene aus der Gruppe (B) entnehmen, so müßten die drei übrigen der Gruppe (C) angehören; wenn dies aber

der Fall ist, so gehört, wie wir in 4. gesehen haben, auch die vierte Tetraëderebene der Gruppe (C) an, also ist die erste Annahme unmöglich; nehmen wir dagegen aus der Gruppe (C) nur eine Tetraëderebene, so müßten die drei übrigen der Gruppe (B) angehören; wenn dies aber der Fall ist, so gehört auch die vierte Tetraëderebene der Gruppe (B) an, wie wir in 3. gesehen haben; also ist auch diese Annahme nicht möglich. Es bleibt nur übrig, zur Bildung des Tetraëders zwei Ebenen aus der Gruppe (B) und die beiden übrigen aus der Gruppe (C) zu entnehmen.

Wenn wir von dem zu bildenden Tetraëder eine Ebene beliebig aus der Gruppe (B) herausnehmen, z. B.

$$1_1\, 1_3\, 2_1\, 2_4\,,$$

so kann für die zweite Ebene nur eine Ebene aus der Gruppe (B) entnommen werden, die den Charakter hat

$$3\,3\,4\,4\,,$$

wo die Indices noch gemäß der Tabelle (B) verschieden gewählt werden können; denn enthielte die zweite Tetraëderebene die ergänzenden beiden Punkte $1_2\, 1_4$ oder die ergänzenden beiden Punkte $2_2\, 2_3$, so würde es unmöglich sein, die beiden übrigen Tetraëderebenen aus der Gruppe (C) zu entnehmen, weil entweder alle 1_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ oder alle 2_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ bereits erschöpft wären, und kein Punkt zweimal in den Tetraëderebenen auftreten darf.

Betrachten wir nun die vollständige Gruppe (B), so erkennen wir, daß in ihr

8	Ebenen	des	Charakters	1 1 2 2 }
8	"	"	"	3 3 4 4 }
8	"	"	"	1 1 3 3 }
8	"	"	"	2 2 4 4 }
8	"	"	"	1 1 4 4 }
8	"	"	"	2 2 3 3 }

vorkommen, wobei die Indices noch weggelassen sind, und die $8 \,.\, 6 = 48$ Ebenen erschöpfen die ganze Gruppe (B); sie paaren sich zum Zweck des zu bildenden Tetraëders, von

dem die beiden ersten Ebenen der Gruppe (B) entnommen werden sollen, auf folgende vier Arten:

$$\left.\begin{matrix}1\,1\,2\,2\\3\,3\,4\,4\end{matrix}\right\}\quad\left.\begin{matrix}1\,1\,3\,3\\2\,2\,4\,4\end{matrix}\right\}\quad\left.\begin{matrix}1\,1\,4\,4\\2\,2\,3\,3\end{matrix}\right\}$$

oder

$$\left.\begin{matrix}2\,2\,1\,1\\3\,3\,4\,4\end{matrix}\right\}\quad\left.\begin{matrix}2\,2\,3\,3\\1\,1\,4\,4\end{matrix}\right\}\quad\left.\begin{matrix}2\,2\,4\,4\\1\,1\,3\,3\end{matrix}\right\}$$

oder

$$\left.\begin{matrix}3\,3\,1\,1\\2\,2\,4\,4\end{matrix}\right\}\quad\left.\begin{matrix}3\,3\,2\,2\\1\,1\,4\,4\end{matrix}\right\}\quad\left.\begin{matrix}3\,3\,4\,4\\1\,1\,2\,2\end{matrix}\right\}$$

oder

$$\left.\begin{matrix}4\,4\,1\,1\\2\,2\,3\,3\end{matrix}\right\}\quad\left.\begin{matrix}4\,4\,2\,2\\1\,1\,3\,3\end{matrix}\right\}\quad\left.\begin{matrix}4\,4\,3\,3\\1\,1\,2\,2\end{matrix}\right\}.$$

Es ist gleichgültig, welche dieser vier Arten wir wählen, es ergeben sich immer dieselben Ebenenpaare aus der Gruppe (B), die überhaupt zusammentreten können für das zu bildende Tetraëder, und zwar der Anzahl nach 24, da in der Gruppe (B), wie wir sehen, 24 Ebenen vorkommen, welche je zwei Punkte 1 1 oder 2 2 oder 3 3 oder 4 4 enthalten.

Was für eines dieser 24 Paare gilt, die aus der Gruppe (B) entnommen werden können zur Bildung eines Tetraëders der verlangten Art, gilt auch für jedes solches Paar; haben wir also die Anzahl der zu bildenden Tetraëder für eines dieser 24 Paare ermittelt, so liefert das Vierundzwanzigfache dieser Anzahl diejenige sämtlicher Tetraëder der verlangten Art.

Nehmen wir nun als erste Tetraëderebene eine beliebige der 24 Ebenen, welche 1 1 enthalten, heraus, z. B.

$$1_1\, 1_3\, 2_1\, 2_4,$$

so kann als zweite Tetraëderebene (von dem Charakter 3 3 4 4) noch jede der folgenden acht gewählt werden:

1) $3_1\, 3_3\, 4_1\, 4_4$ 2) $3_1\, 3_3\, 4_2\, 4_3$ 3) $3_2\, 3_4\, 4_1\, 4_4$ 4) $3_2\, 3_4\, 4_2\, 4_3$
5) $3_1\, 3_4\, 4_1\, 4_3$ 6) $3_2\, 3_3\, 4_1\, 4_3$ 7) $3_1\, 3_4\, 4_2\, 4_4$ 8) $3_2\, 3_3\, 4_2\, 4_4$.

In jedem dieser acht Fälle, in welchem nun die beiden ersten Tetraëderebenen aus der Gruppe (B) entnommen sind, lassen sich die beiden übrigen Tetraëderebenen noch auf zwei Arten aus der Gruppe (C) hinzufügen, nämlich